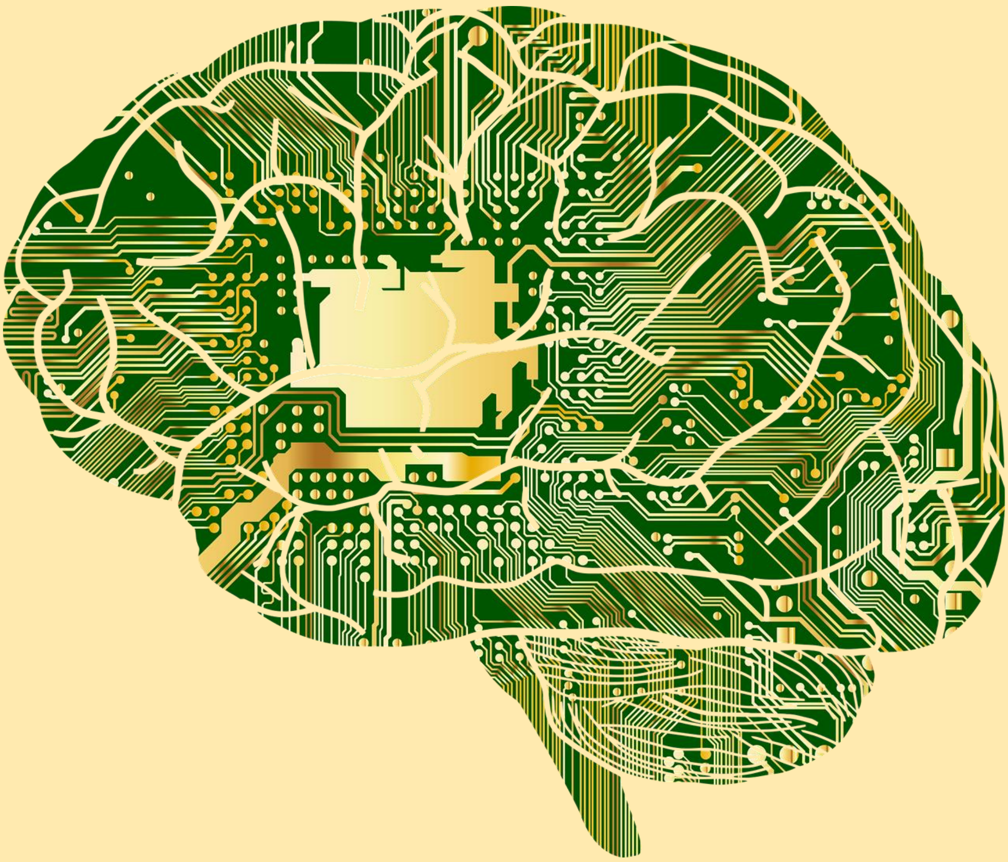
Produto Educacional



PROSPOSTA PEDAGÓGICA PARA O ESTUDO DE FUNÇÃO NO ENSINO MÉDIO:

IMPLEMENTANDO O PENSAMENTO COMPUTACIONAL

Lívia Ladeira Gomes
Silvia Cristina Freitas Batista
Gilmara Teixeira Barcelos Peixoto

Fevereiro - 2021

Produto educacional, no formato de Proposta Pedagógica, elaborado no âmbito do Mestrado Profissional em Ensino e suas Tecnologias, do Instituto Federal Fluminense, e experimentado com alunos do Ensino Médio da Rede Federal de Ensino.

APRESENTAÇÃO

O presente produto educacional[1] foi elaborado no âmbito de uma pesquisa de mestrado, que teve como objetivo investigar como uma proposta pedagógica baseada nos princípios do Pensamento Computacional e na Teoria da Aprendizagem Significativa pode contribuir para o estudo de função no Ensino Médio.

A referida proposta pedagógica aqui descrita é composta por atividades didáticas e orientações teóricas e práticas. Na primeira seção, trata-se das orientações teóricas, parte em que se aborda o aporte teórico do Pensamento Computacional e da Teoria da Aprendizagem Significativa. Dessa forma, um professor que deseje replicar ou adaptar a presente proposta pode estudar os princípios teóricos e as definições adotados.

Na seção das atividades didáticas, é possível encontrar a atividade de sondagem conceitual, a apostila "Introdução de Função" e a atividade final. A atividade de sondagem tem como objetivo identificar os *subsunçores* que os alunos têm e que são relacionados aos conteúdos estudados no final do Ensino Fundamental relevantes à continuidade do estudo de funções no Ensino Médio, bem como verificar as dificuldades dos estudantes na resolução de problemas. A apostila articula o estudo inicial de função aos princípios do Pensamento Computacional, trabalhando tópicos como domínio, contradomínio e imagem, representações de uma função, construções e análises gráficas, entre outros. Além disso, na apostila, são propostas reflexões acerca dos temas abordados. A atividade final busca por indícios de aprendizagem significativa dos conceitos tratados no material trabalhado, além de procurar perceber quais estratégias os alunos usam na resolução dos problemas propostos.

Por último, apresentam-se as orientações práticas, nas quais se trata dos desafios e das possibilidades de implementação do Pensamento Computacional junto ao currículo de Matemática. Essas orientações baseiam-se nas experiências vividas durante a experimentação da proposta pedagógica com alunos ingressantes na 1ª série do Ensino Médio de um Instituto Federal de Educação.

Com esta proposta pedagógica, espera-se que professores de Matemática da Educação Básica possam vislumbrar possibilidades de implementação do Pensamento

---

[1] A imagem utilizada na capa desta Proposta Pedagógica foi retirada do site Pixabay e possui a Licença Pixabay, sendo assim permitido o seu uso para fins comerciais ou não comerciais, como pode ser conferido em https://pixabay.com/pt/service/license/.

Computacional nas aulas dessa disciplina, de modo a favorecer tanto a aprendizagem de conteúdos do currículo quanto o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas por parte dos alunos.

SUMÁRIO

1. Orientações Teóricas ... 6
1.1 Pensamento Computacional ... 6
1.2 Teoria da Aprendizagem Significativa ... 8
2. Atividades Didáticas ... 11
2.1 Atividade de Sondagem Conceitual ... 11
2.2 Apostila “Introdução de Função” ... 15
2.3 Atividade Final ... 41
3. Orientações Práticas ... 45
Referências ... 49

1. Orientações Teóricas

Nesta seção são apresentados os aportes teóricos sobre o Pensamento Computacional e a Teoria da Aprendizagem Significativa, bem como as definições adotadas para cada um deles.

1.1 Pensamento Computacional

Segundo Brackmann (2017), o que hoje é denominado Pensamento Computacional surge de uma previsão de John von Neumann, em 1940, de que os computadores não seriam ferramentas que auxiliariam a ciência, mas sim uma forma de fazer ciência. Ainda segundo o referido autor, em 1975, o prêmio Nobel de Física foi atribuído a Laureate Ken Wilson, o qual, por conta do uso das máquinas (computadores), conseguiu criar modelos computacionais nunca antes imaginados. Por fim, na década de 80, provou-se ser a Computação um terceiro pilar da ciência, juntamente com Teoria e Experimentação, nascendo, assim, o que hoje é conhecido como Pensamento Computacional (BRACKMANN, 2017).

Nesse contexto, diversas definições de Pensamento Computacional podem ser encontradas na literatura. É importante frisar que, independente da definição adotada, o Pensamento Computacional não pode ser confundido com a manipulação de tecnologias digitais e nem com uma forma de pensar mecânica, que restringe a capacidade de pensamento humano (BRACKMANN, 2017).

Esse termo, que foi popularizado por Jeanette Wing, em 2006, com a publicação do artigo *Computational Thinking*, foi por ela mesma definido de diversas formas, ao longo do tempo (BRACKMANN, 2017). A definição que está sendo adotada neste trabalho, como mencionado na Introdução, e que contempla a essência das definições anteriores é que o Pensamento Computacional é "[...] o processo de pensamento envolvido na formulação de um problema e na expressão de sua(s) solução(ões) de tal forma que um computador - humano ou máquina - possa efetivamente executar." (WING, 2017, p. 8, tradução nossa).

Wing (2006, p. 33, tradução nossa) também afirma que "[...] para ler, escrever e calcular, devemos adicionar o Pensamento Computacional à capacidade analítica de cada criança.". A partir disso, diversos países vêm implementando o Pensamento

Computacional em seus currículos da Educação Básica (VALENTE, 2016). Três formas de implementação podem ser identificadas: i) atividades de ciência da computação, que se subdividem em atividade de programação de forma complementar ao currículo e disciplinas no currículo sobre letramento digital; ii) Pensamento Computacional como uma disciplina curricular; iii) Pensamento Computacional como uma atividade transversal ao currículo (VALENTE, 2016). No Brasil, com a homologação da Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018), o Pensamento Computacional apresenta-se conforme o último item listado.

Os conceitos, segundo Brackmann (2017), relacionados ao desenvolvimento do Pensamento Computacional, como citado na Introdução, são: i) Decomposição; ii) Reconhecimento de Padrões; iii) Abstração; iv) Algoritmo. Para o autor, esses quatro conceitos representam os pilares (ou princípios) do Pensamento Computacional.

Segundo esse autor, a Decomposição envolve identificar um problema complexo e subdividi-lo em partes menores, mais fáceis de gerenciar. Cada um desses problemas menores pode ser analisado com maior profundidade, buscando-se por problemas semelhantes que já foram resolvidos anteriormente, o que caracteriza o Reconhecimento de Padrões. A partir disso, é necessário focar nas informações que são relevantes para a resolução, o que configura a capacidade de Abstração. Por último, Brackmann (2017) afirma que é preciso, após os três primeiros processos, criar passos, algoritmos, para resolver cada um dos problemas desmembrados. Há, segundo o referido autor, uma interdependência entre os princípios no processo de formulações viáveis para resolver a situação proposta. Os princípios encontram-se resumidos no Quadro 1.

Quadro 1 - Princípios do Pensamento Computacional

Decomposição	Fragmentação do problema em problemas menores.
Reconhecimento de Padrões	Busca por problemas semelhantes já resolvidos.
Abstração	Filtragem do que é necessário e o que não é para resolver o problema.
Algoritmo	Estabelecimento e execução de passos para a resolução do problema.

Fonte: Elaboração própria a partir de Brackman (2017).

Salienta-se que o Pensamento Computacional pode ser desenvolvido por atividades plugadas ou desplugadas, que são, respectivamente, atividades feitas com o auxílio de tecnologias digitais e aquelas feitas sem o uso dessas tecnologias.

Pode-se observar, nos princípios do Pensamento Computacional, uma valorização do que o aluno já conhece, dos conhecimentos que já detém. Nesse sentido, buscar promover uma aprendizagem significativa, conforme propõe a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel, apresenta-se favorável ao desenvolvimento do Pensamento Computacional, uma vez que essa "[...] se caracteriza pela interação entre conhecimentos prévios e conhecimentos novos [...]" (MOREIRA, 2012, p. 2).

1.2 Teoria da Aprendizagem Significativa

Por vezes, ao ouvir o termo "aprendizagem significativa" associado à TAS, tende-se a considerar esse termo como sinônimo de uma aprendizagem com significado, com aplicações para a vida. Porém, nota-se que tal termo é apresentado por Ausubel como o oposto de uma aprendizagem mecânica, tida por ele como memorística (MOREIRA, 2012).

Trazendo uma definição, aprendizagem significativa, segundo a Teoria da Aprendizagem Significativa proposta por David Ausubel em 1968, "[...] é aquela em que ideias expressas simbolicamente interagem de maneira substantiva e não-arbitrária com aquilo que o aprendiz já sabe." (MOREIRA, 2012, p. 2).

Interagir de forma substantiva equivale a interagir de forma não literal, que nada mais é do que uma interação que possui um significado lógico (AUSUBEL, 2003). Já a interação não arbitrária pode ser entendida como uma interação plausível, que não seja aleatória ou que não seja com qualquer conhecimento prévio, mas sim com conhecimentos especificamente relevantes (AUSUBEL, 2003; MOREIRA, 2012).

Em suma, pode-se dizer que aprendizagem significativa é aquela que ocorre quando o aluno utiliza conhecimentos relevantes que já detém para construir novos conhecimentos. A esses conhecimentos prévios do estudante, Ausubel (2003) denomina *subsunçores* ou *ideias âncora*. Moreira (2012) complementa dizendo que esses *subsunçores* podem ter maior ou menor estabilidade na estrutura cognitiva do aluno, porém, como a assimilação ocorre na interação desses com os novos conhecimentos, os próprios *subsunçores* adquirem novos significados no processo, tornando-se assim mais estáveis.

De acordo com as discussões feitas por Moreira (2012), em consonância com a teoria de Ausubel (2003), para que a aprendizagem significativa ocorra, três condições devem ser satisfeitas: i) existência de um material potencialmente significativo, ou seja, que tenha um sentido lógico; ii) predisposição do aluno para aprender; iii) o aprendiz deve possuir os *subsunçores* relevantes com os quais o novo conceito possa ser relacionado.

Neste trabalho, considera-se que a integração dos princípios do Pensamento Computacional com a TAS possa constituir um material potencialmente significativo, atendendo assim à primeira condição.

Carvalho A. (2011) destaca que, segundo a TAS, a aprendizagem significativa pode apresentar-se como: i) aprendizagem subordinada; ii) aprendizagem superordenada; iii) aprendizagem combinatória. Essas podem ser categorizadas em diferenciação progressiva e reconciliação integradora ou integrativa, que são os processos fundamentais para que a aprendizagem significativa ocorra (Quadro 2).

Quadro 2 – Caracterização dos tipos de aprendizagem - TAS

<table>
<tr><th>Tipo de Aprendizagem</th><th colspan="2">Característica</th><th>Generalização do Processo</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Subordinada</td><td rowspan="2">Processo mais comum, é aquela em que o novo conhecimento adquire novo significado por meio da ancoragem em subsunçores relevantes.</td><td>Pode ser derivativa, em que os efeitos da assimilação obliteradora ocorre mais rápido pois o novo conceito é entendido como um caso específico do subsunçor, corroborando o mesmo.</td><td rowspan="2">Diferenciação Progressiva
é o processo de atribuição de novos significados a um dado subsunçor por meio da utilização sucessiva dele na construção de novos conceitos.</td></tr>
<tr><td>Pode ser corretiva, em que a modificação do subsunçor é bastante acentuada. O conceito não é imediatamente assimilado, sendo entendido como uma extensão do subsunçor.</td></tr>
<tr><td>Superordenada</td><td colspan="2">Processo em que um conceito novo, mais abrangente, passa a subordinar conhecimentos prévios. Em resumo, o indivíduo possui diversos subsunçores muito particulares, com poucas conexões, até que é apresentado um conceitos mais amplo que leva à significação dos conhecimentos prévios.</td><td rowspan="2">Reconciliação Integrativa
é o processo dinâmico de modificação de estruturas já existentes por meio da descoberta de conexões entre as mesmas. Em geral, ocorre de forma simultânea à diferenciação progressiva.</td></tr>
<tr><td>Combinatória</td><td colspan="2">Processo em que a atribuição de significado à um novo conceito ocorre da combinação de proposições de significados comuns existentes na estrutura cognitiva do indivíduo, mas essas proposições não subordinam nem superordenam os novos conceitos.</td></tr>
</table>

Fonte: Elaboração própria a partir de Carvalho (2011) e Moreira (2012).

Por meio do Quadro 2, é possível perceber que há várias formas de o indivíduo chegar a uma aprendizagem significativa. Vale ressaltar que aprendizagem significativa subordinada, aprendizagem significativa superordenada e aprendizagem significativa combinatória também podem ser denominadas, respectivamente, subordinação, superordenação e combinação.

A seção 2 explora a integração das duas teorias, aqui apresentadas, no intuito de promover uma aprendizagem significativa de função.

2. Atividades Didáticas

Nesta seção são apresentadas as atividades de sondagem conceitual e final, assim como a apostila "Introdução de Função", elaboradas e experimentadas com alunos da 1ª série do Ensino Médio.

2.1 Atividade de Sondagem Conceitual

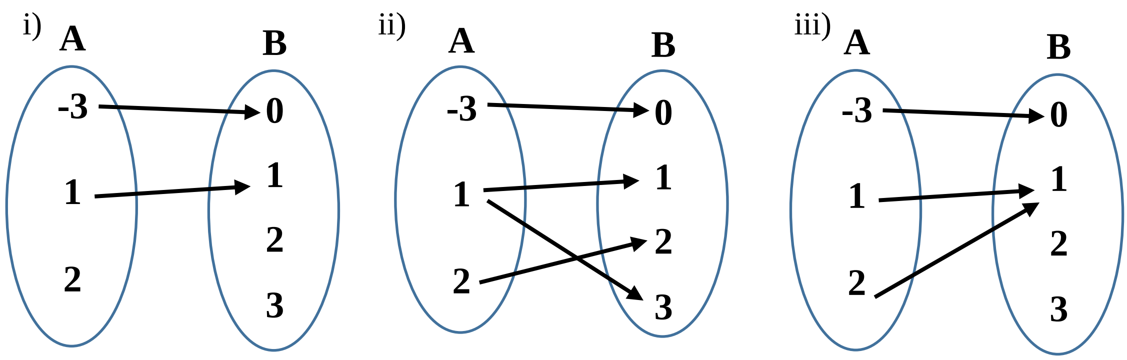
MESTRADO PROFISSIONAL ENSINO E SUAS TECNOLOGIAS — INSTITUTO FEDERAL Fluminense *Campus* Campos Centro — MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO — PÁTRIA AMADA BRASIL GOVERNO FEDERAL

Atividade de Sondagem Conceitual

Apelido: ____ Data: ___ /___/ ________

Registre todos os cálculos realizados

1. Observe a seguir as relações entre os conjuntos A e B.

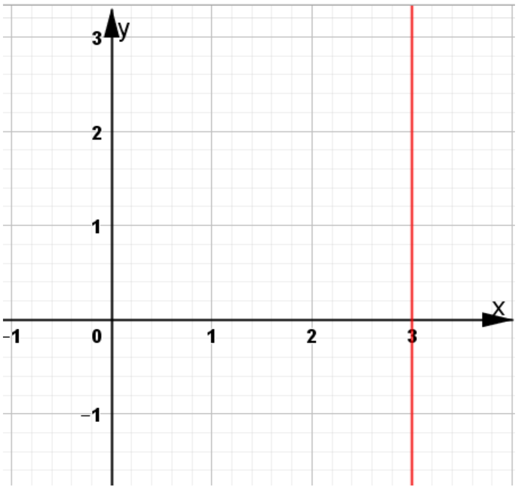


a) Qual das relações acima representa uma função de A em B?

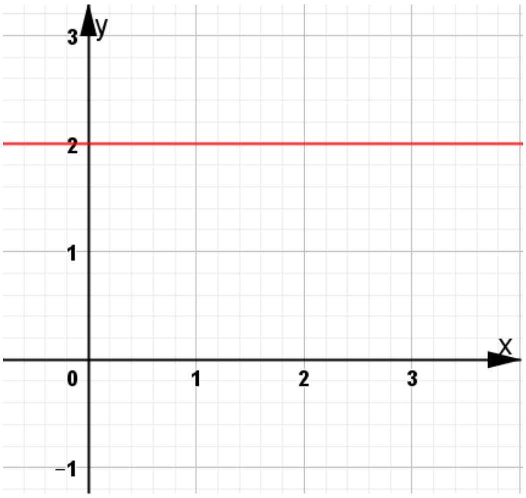
b) Determine os conjuntos domínio, contradomínio e imagem da função identificada no item "a".

2. Sendo f uma função tal que $y = f(x)$, assinale a alternativa cujo gráfico **NÃO** poderia representar f.

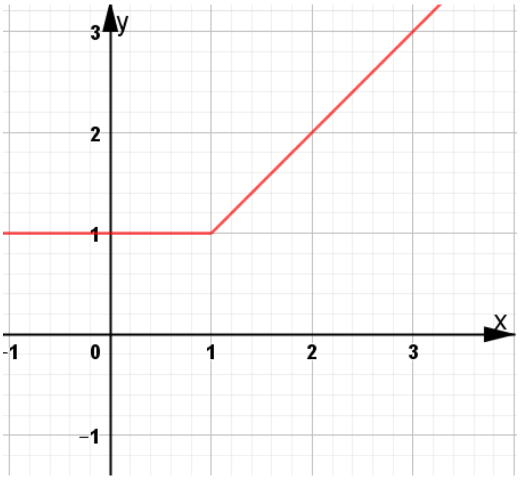
a) (   )



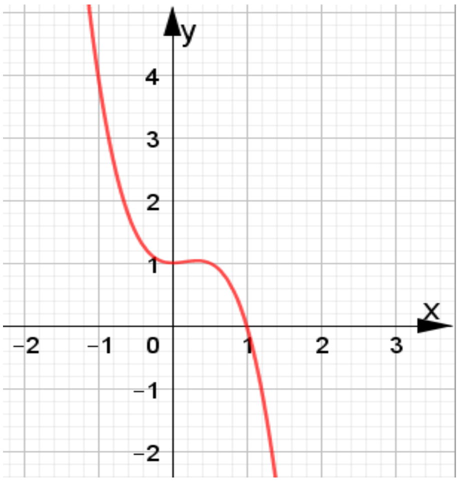
b) (   )



c) (   )



d) (   )

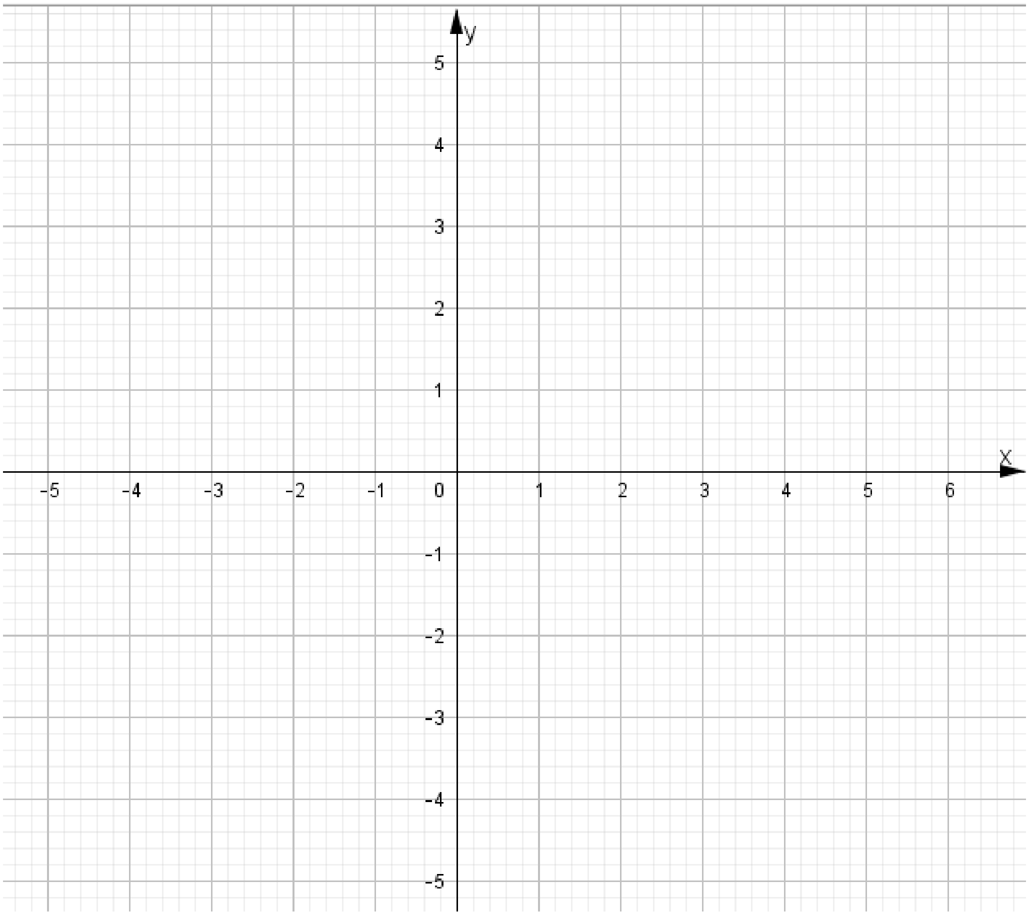


3. Considere a função g, $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = 2x - 2$.

a) Determine $g(-1)$, $g\left(\frac{1}{2}\right)$ e $g(0)$.

b) Explique o que os valores encontrados no item "a" representam?

c) Faça um esboço do gráfico dessa função.



4. Sobre a função h, $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(x) = ax + b$, sabe-se que $h(0) = 1$ e $h(-1) = \frac{1}{2}$. Com base nessas informações, determine os valores de a e b.

5. Considere a função f, $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x + b$ em que $f(3) = 5$ e $f(-1) = 1$. Determine o valor de b.

6. Para cada item a seguir, determine o conjunto domínio das funções, ou seja, determine o conjunto de todos os valores de $x \in \mathbb{R}$ que permitem realizar, em $\mathbb{R}$, as operações indicadas na lei de formação.

a) $f(x) = x$

b) $h(x) = x - \frac{1}{2}$

c) $g(x) = \frac{14}{x}$

d) $y = \sqrt{x}$

7. Mariana tem dois anos e já frequenta a creche. Sua mãe paga um valor fixo de R$ 650,00 para que ela estude de segunda a sexta-feira, das 7h às 16h. Há uma tolerância de 15 minutos e, assim, os pais podem pegar Mariana até às 16h15min sem custo adicional. Porém, a creche cobra dos pais, ao final de cada mês, um valor de R$ 0,50 de multa por cada minuto completo de atraso para buscar a criança, a partir das 16h15min, ou seja, as frações de minutos não são cobradas.

a) No mês em que os pais de Mariana atrasaram, além dos 15 minutos diários permitidos, 110 minutos para buscá-la, quanto pagaram de multa? E quanto pagaram de mensalidade?

b) No mês em que eles atrasaram 54 minutos e 32 segundos, além dos 15 minutos diários permitidos, pagaram que valor de mensalidade?

c) É possível estabelecer alguma relação matemática para o cálculo mensal que os pais de Mariana terão, para qualquer que seja o tempo de atraso além dis 15 minutos diários permitidos? Se sim, escreva essa relação e a utilize para conferir os resultados encontrados nos itens “a” e “b”.

d) Considerando que os minutos de atraso e o valor pago por mês são duas variáveis relacionadas, qual seria a variável dependente e qual seria a variável independente?

2.2 Apostila "Introdução de Função"

MESTRADO PROFISSIONAL ENSINO E SUAS TECNOLOGIAS

INSTITUTO FEDERAL Fluminense *Campus* Campos Centro

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

PÁTRIA AMADA BRASIL GOVERNO FEDERAL

Apelido: ____ Data: ___ /___/ _______

1. Sobre resolução de problemas

Leia a situação abaixo e resolva o que se pede:

Joãozinho foi à padaria do sr. Pedro, que fica a uma distância de 2 quarteirões da sua casa. Ele recebeu R$ 7,00 para comprar 4 pães e 1 litro de leite. Nessa padaria, cada pão custa R$ 0,50 e cada litro de leite custa R$ 4,00. Com o troco, Joãozinho poderia comprar algumas guloseimas para si. Dentre as opções na padaria, havia balas a R$ 0,25 a unidade, pirulito a R$ 0,50 a unidade e chocolate a R$ 2,00 a unidade. Dentre essas opções, o que Joãozinho poderia escolher?

Reflexão sobre a resolução do problema:

Na Matemática, sempre nos deparamos com situações-problema para resolver, sejam elas mais simples ou mais complexas. Por vezes ficamos inseguro e com dúvida sobre por onde começar. O fato é que existem etapas que podem nos auxiliar na resolução de situações como essa. Então vamos refletir por ETAPAS:

a) É possível dividir/fragmentar o que o enunciado pede em situações menores, de modo que se torne mais fácil solucionar o problema como um todo?

b) É a primeira vez que você tenta solucionar uma situação como essa? Mesmo que seja, você já realizou um exercício, problema contextualizado ou mesmo vivenciou uma situação análoga em que pode observar semelhanças com este?

c) Você precisa considerar a todas as informações disponibilizadas no enunciado para resolver o que se pede?

d) Agora que já refletiu sobre os três pontos anteriores, você consegue adotar alguma estratégia para iniciar a resolução?

Os quatro pontos anteriores nos remetem aos princípios de uma forma de raciocinar sobre os problemas, conhecida como Pensamento Computacional:

a) DECOMPOSIÇÃO

Fragmentação da situação que se deseja resolver em problemas menores.

b) RECONHECIMENTO DE PADRÕES

Busca por problemas semelhantes já resolvidos que auxiliem na solução de novos problemas propostos.

c) ABSTRAÇÃO

Filtragem do que é necessário e o que não é para resolver o problema.

d) ALGORITMO

Estabelecimento e execução de passos para a resolução do problema.

Vamos aplicar esses princípios na resolução da situação de Joãozinho:

a) DECOMPOSIÇÃO: podemos observar que há várias informações pertinentes ao problema. Dessa forma, pelo princípio da decomposição, devemos dividir as situações que podemos resolver separadamente. Então vamos pensar: o questionamento final é sobre o que Joãozinho poderia comprar com o que lhe sobrará de troco. Para isso, precisamos:

Problema 1 - calcular quanto ele terá de gasto;

Problema 2 - calcular o que restará de dinheiro após o pagamento dos pães e do leite;

Problema 3 - observar os valores das guloseimas disponíveis e ver o que é possível pagar com o troco;

Problema 4 - conseguimos responder o que Joãozinho conseguirá comprar. Veja que fragmentamos o problema inicial em quatro pequenos problemas.

b) RECONHECIMENTO DE PADRÕES: nesta etapa, é importante que nos lembremos do que já resolvemos em outras situações. Neste problema em questão, é bem possível que você já tenha vivenciado alguma situação em que fez compras e recebeu troco. Os cálculos que fez, na ocasião, podem te ajudar a decidir sobre quais operações matemáticas você fará para responder ao questionamento da situação.

c) ABSTRAÇÃO: este princípio é importante, pois nos permite filtrar aquilo que não é relevante para a resolução. No enunciado da situação de Joãozinho, logo percebemos que a informação da distância entre a sua casa e a padaria é irrelevante para respondermos ao problema.

d) ALGORITMO: agora é o momento de definirmos e executarmos passos para a resolução do problema, tomando como base o que foi identificado nas etapas anteriores.

Problema 1 4 pães a R$ 0,50 cada: 4 x 0,50 = R$ 2,00 1 litro de leite a R$ 4,00 cada: 1 x 4,00 = R$ 4,00 Total gasto: 2,00 + 4,00 = **R$ 6,00**	Fazemos as devidas multiplicações e somas.
Problema 2 Valor total em dinheiro - Total gasto 7,00 - 6,00 = **R$ 1,00 (troco)**	Fazemos a subtração.
Problema 3 Bala: R$ 0,25 → Joãozinho pode comprar Pirulito: R$ 0,50 → Joãozinho pode comprar Chocolate: R$ 2,00 → Joãozinho não pode	Fazemos uma comparação entre os preços das guloseimas e o quanto resta de troco.
Problema 4 Joãozinho pode comprar 4 balas ou Joãozinho pode comprar 2 pirulitos ou Joãozinho pode comprar 2 balas e 1 pirulito	Fazemos uma divisão, mesmo que mental, do valor do troco pelo preço de cada guloseima

Os princípios usados na resolução do problema de Joãozinho podem auxiliar na resolução de problemas em diversos conteúdos da Matemática e, mais ainda, podem ser usados também no estudo de tais conteúdos, como feito no estudo de Função promovido a seguir.

2. Estudo introdutório de função

2.1 A ideia de função, definição e lei de formação

Pense nas seguintes situações:

- O valor a ser pago na compra de determinada mercadoria está relacionado à quantidade de unidades compradas.

- O salário de um vendedor é determinado pelas vendas que realizou ao longo do mês, acrescido de uma parte fixa.

Podemos perceber que as duas situações descritas apresentam relações entre duas variáveis. No primeiro caso, o **valor pago** e o **número de unidades compradas**; e, no segundo caso, o **salário** e o **valor das vendas mensais**. Podemos observar também que mais do que simplesmente relacionar tais variáveis, as situações promovem uma dependência entre elas.

Situação-problema 1: Se um vidro de álcool em gel de 500 ml custa R$15,00, o valor total a ser pago por uma pessoa que compra esse produto está relacionada com quantos vidros serão comprados. Complete o total a ser pago quando comprados 3, 4, 10 ou 21 vidros de álcool em gel.

Número de vidros comprados	0	1	2	3	4	...	10	...	21
Total a ser pago	R$0,00	R$15,00	R$30,00	_____	_____	...	_____	...	_____

Vamos observar os exemplos práticos:

Na situação acima:

Qual variável é dependente? ____

Qual variável é independente? ____

Situação-problema 2: Se um vendedor de roupas recebe mensalmente um valor fixo de R$1 000,00, mais uma comissão de 2% do valor total de suas vendas no mês, seu salário dependerá do quanto ele vendeu no referido mês. Complete o salário que será recebido quando forem vendidos R$10 300,00 ou R$20 000,00.

Valor vendido no mês	R$15 000,00	R$10 300,00	R$20 000,00	...
Cálculo do salário	$1000 + \frac{2}{100} \times 15\,000$	$1000 + \frac{2}{100} \times 10\,300$	$1000 + \frac{2}{100} \times 20\,000$	...
Salário	R$1 300,00	________	________	...

Na situação acima:

Qual variável é dependente? ____

Qual variável é independente? ____

Podemos dizer que essas duas situações representam funções. Vejamos o porquê:

Função, de maneira geral, pode ser descrita como uma **relação entre duas grandezas**. Essa relação, em específico, deve atender a dois critérios:

1. Todos os valores da variável independente estão associados à valores da variável dependente;
2. Para cada valor da variável independente, existe um único valor da variável dependente.

1.Vamos conversar?

As duas situações apresentadas realmente atendem aos critérios que caracterizam uma relação como função?

É comum, na linguagem matemática, chamarmos a variável independente de x e a variável dependente de y (ou f(x)* ou g(x)** ou h(x)***, entre outros). Assim, podemos generalizar as situações acima da seguinte forma:

*$f(x)$ lê-se "f de x"
**$g(x)$ lê-se "g de x"
***$h(x)$ lê-se "h de x"

Observação

Situação-problema 1:

Número de vidros comprados (x)	0	1	2	3	...	x
Total a ser pago (y)	15 x 0	15 x 1	15 x 2	15 x 3	...	$y = 15x$

Situação-problema 2: neste caso, determine você mesmo o salário a ser pago - ou seja, $f(x)$ - quando o valor vendido no mês for igual a x.

Valor vendido no mês (x)	15 000	10 300	20 000	...	X
Salário ($f(x)$)	$\frac{2}{100} \times 15\,000 + 1000$	$\frac{2}{100} \times 10\,300 + 1000$	$\frac{2}{100} \times 20\,000 + 1000$	...	______________

Para essas generalizações, damos o nome de **lei de formação** da função.

Para chegarmos à lei de formação das funções acima, usamos os princípios da **Decomposição** e do **Reconhecimento de Padrões**. O primeiro na fragmentação das informações das situações-problema 1 e 2, de maneira que foi possível identificar uma regularidade no cálculo. O segundo princípio foi usado na generalização da segunda situação, com base no que foi feito com a primeira situação.

Existem outras duas maneiras de representar uma função: por meio de um **diagrama de setas**, quando trabalhamos com conjuntos* finitos de poucos elementos, e por uma representação gráfica no **plano cartesiano**.

Antes de exemplificá-las, vamos formalizar, matematicamente, a definição de função discutida anteriormente:

Quadro 1 - Formalização da definição de função

Sejam A e B dois conjuntos não vazios, uma relação *f* de A em B é uma função quando associa cada elemento *x*, pertencente ao conjunto A, a um único elemento *y*, pertencente ao conjunto B.

* Os conjuntos são importantíssimos no estudo de funções. Utilizamos, principalmente, conjuntos numéricos, ao estudar esse tema. Vamos relembrá-los:

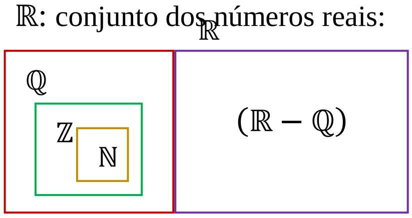
Existem conjuntos **finitos** e conjuntos **infinitos**

A = {-2, -1, 0, 1, 2}
B = { $\sqrt{3}$ }
C = {2, 4, 6, ..., 50}

A = {2, 3, 5, 7, ...}
B = {t | t é ímpar}

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, (\mathbb{R} - \mathbb{Q}), \mathbb{R}$

$\mathbb{N}$ = {0,1, 2, 3, 4, 5, 6, ...}
$\mathbb{Z}$ = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, ...}
$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^*\right\}$
$(\mathbb{R} - \mathbb{Q})$: conjunto dos números irracionais. Ex.: $\pi, \sqrt{5}, -0{,}2945...$
$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais:



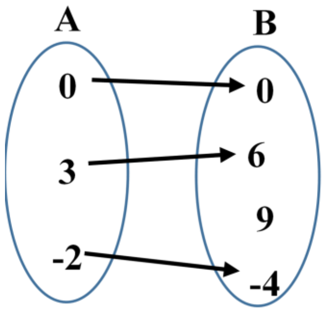
Cada componente de um conjunto é chamado de **elemento.**

Observação

2.2 Diagrama de Setas

Podemos representar uma função por meio de um diagrama de setas. Vejamos três exemplos:

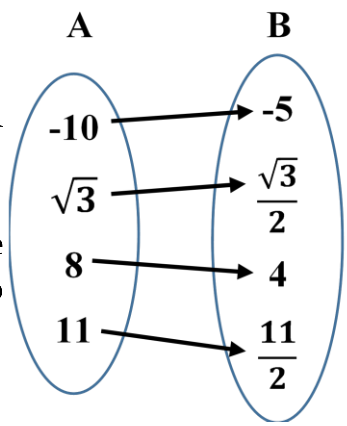
1. Seja *g* uma função de A em B, sendo A = {-2, 0, 3} e B = {-4, 0, 6, 9}, que associa cada elemento do conjunto A ao seu dobro.



2.Vamos conversar?

Qual seria a lei de formação da função neste primeiro exemplo?

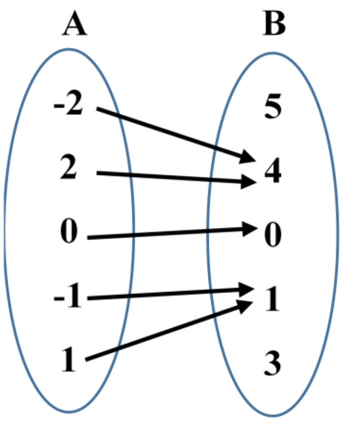
2. Seja *h* uma função de A em B, sendo A = {-10, $\sqrt{3}$, 8, 11} e B = $\left\{-5, \frac{\sqrt{3}}{2}, 4, \frac{11}{2}\right\}$, que associa cada elemento do conjunto A à sua metade.



3.Vamos conversar?

Qual seria a lei de formação da função neste segundo exemplo?

3. Seja *f* uma função de A em B, sendo A = {-1, 2, 0, 1, 2} e B = {0, 1, 2, 3, 4 5}, que associa cada elemento do conjunto A ao seu quadrado.



4.Vamos conversar?

Qual seria a lei de formação da função neste terceiro exemplo?

Para respondermos aos questionamentos das caixas verdes 2, 3 e 4, sobre as leis de formação de cada exemplo, utilizamos os princípios do **Reconhecimento de Padrões** e da **Abstração**. O primeiro princípio está relacionado com o embasamento adquirido na identificação das leis de formação dos dois problemas iniciais da seção 2.1, o que nos possibilita resolver o que se pede. O segundo princípio está relacionado com a presença, em linguagem materna, da lei de formação nos enunciados. Assim, não seria necessário levar em conta todo o enunciado, já que a última frase contém as informações necessárias. Caso você sinta necessidade de analisar, valor por valor, para construir a lei de formação, considere que ainda está utilizando o recurso da **Decomposição**.

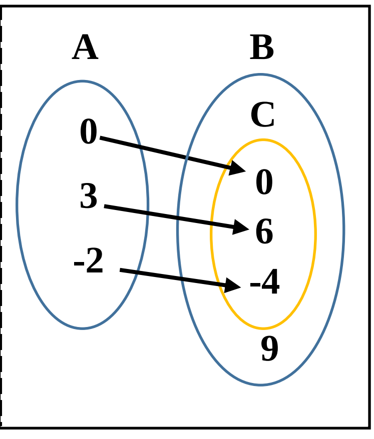
2.3 Conjuntos domínio, contradomínio e imagem

Agora faremos algumas considerações quanto aos exemplos 1, 2 e 3 da seção 2.2, que expressaram as funções *g*, *h* e *f*:

- Como visto anteriormente, podemos garantir de *g*, *h* e *f* são funções, pois todos os elementos de A estão relacionados a um, e somente um, elemento de B;
- Observe que nos exemplos 1 e 3, existem elementos de B que não possuem um elemento correspondente em A. Isso pode ocorrer, pois não fere os dois critérios necessários para que uma relação seja uma função;
- O fato de ser possível, em uma função genérica *f* de A em B, que elementos do conjunto B não terem correspondentes no conjunto A nos leva a considerar duas situações:

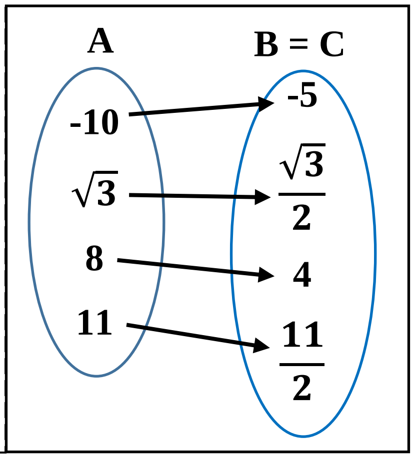
Primeira:

- Como nos exemplos 1 e 3, podem existir elementos de B sem correspondente em A;
- Podemos considerar um terceiro conjunto, C, cujos elementos são os valores de B que efetivamente estão relacionados com os elementos de A;
- Podemos concluir que o conjunto C está contido no conjunto B, ou seja, encontramos todos os elementos de C em B. Em situações como nos exemplos 1 e 3, há elementos de B que não encontramos em C.



Segunda:

- Como no exemplo 2, todos os elementos de B possuem um correspondente em A;
- O terceiro conjunto, C, é igual ao conjunto B, ou seja, todos os elementos pertencentes à C são encontrados em B, assim como todos os elementos pertencentes à B são encontrados em C.



Matematicamente, esses conjuntos A, B e C são chamados respectivamente de conjunto **domínio**, **contradomínio** e **imagem**.

Quadro 2 - Definição dos conjuntos domínio, contradomínio e imagem

- ❖ Em uma função *f*, de A em B, o conjunto A é chamado de **conjunto domínio** e representado por D(*f*). O domínio é o conjunto dos valores que a variável *x* assume;

- ❖ Em uma função *f*, de A em B, o conjunto B é chamado de **conjunto contradomínio** e representado por CD(*f*). O contradomínio é o conjunto dos valores que podem corresponder aos elementos do domínio;

- ❖ Em uma função *f*, de A em B, cada elemento *x* do conjunto A tem um, e somente um, correspondente *y* no conjunto B. A esse valor *y* é dado o nome de imagem de seu correspondente no domínio e o conjunto de todos os valores de *y* é chamado de **conjunto imagem**.

Com base na discussão anterior, vamos determinar os conjuntos domínio, contradomínio e imagem da situação-problema 1 da seção 2.1 e do exemplo 1 da seção 2.2:

Na situação-problema 1	**No exemplo 1:**
(y = 15x)	D(g) = {-2, 0, 3}
D(f) = ℕ	CD(g) = {-4, 0, 6, 9}
CD(f) = ℕ	Im(g) = {-4, 0, 6}
Im(f) = {0, 15, 30, ...}	

5.Vamos conversar?

Quais seriam os conjuntos domínio, contradomínio e imagem do exemplo 2 da seção 2.2?

Acesse o *applet* do GeoGebra* disponível em https://www.geogebra.org/m/rzj3swwy e manipule as setas, acrescentando, retirando e explorando diferentes possibilidades de arranjo para a relação *f*. Perceba que para que *f* seja uma função, é preciso que se atenda aos dois critérios descritos na seção 2.1, página 5.

*O GeoGebra é um *software* **gratuito** e possui versões para computador, *tablet* e *smarphone* Android e iOS. Além do aplicativo 2D que usaremos em nossas atividades, existem versões para construções geométricas, calculadoras gráficas 3D, entre outros.

Observação

Pode haver algumas **restrições para o conjunto domínio**, considerando o universo dos números reais. Essas restrições são determinadas para que a função possa existir, conforme podemos observar nos exemplos abaixo:

1. Considere a função f, definida por $f(x) = \frac{2}{x}$. Se, hipoteticamente, não houvesse qualquer restrição para o domínio, poderíamos atribuir qualquer valor real para *x* e determinar a sua imagem:

$$f(-2) = \frac{2}{-2} = -1$$

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{-\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3}$$

$$f(1) = \frac{2}{1} = 2$$

$$f(10) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

Se atribuíssemos zero como valor para *x*, teríamos o denominador igual a zero, que não existe.

Se 0 pertencesse ao conjunto domínio, $f(x) = \frac{2}{x}$ não poderia ser seria uma função, pois $f(0)$ não existe. Assim, para que *f* seja uma função, deve-se excluir o 0 do domínio:

$$\mathbf{D}(\boldsymbol{f}) = \mathbb{R} - \{\mathbf{0}\} \text{ ou } \mathbf{D}(\boldsymbol{f}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \mid \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}\}$$

Para funções em que a variável independente encontra-se no denominador, deve-se sempre ter o cuidado de analisar as restrições do domínio considerando que o denominador nunca poderá ser igual a 0.

6.Vamos conversar?

Qual seria o domínio da função g, definida por $g(x) = \frac{14}{2-x}$?

Exercite um pouco mais: determine o domínio das funções abaixo.

$$y = -\frac{14}{3x}$$

$$y = -\frac{1}{x - \frac{1}{2}}$$

2. Considere a função h, definida por $h(x) = 3\sqrt{x}$. Se, hipoteticamente, não houvesse qualquer restrição para o domínio, poderíamos atribuir qualquer valor real para x e determinar a sua imagem:

$h(-2) = 3\sqrt{-2} \notin \mathbb{R}$

$h(18) = 3\sqrt{18}$

$h(1) = 3\sqrt{1} = 3$

$h(0) = 3\sqrt{0} = 0$

$h(-16) = 3\sqrt{-16} \notin \mathbb{R}$

Se valores negativos pertencessem ao conjunto domínio, $h(x) = 3\sqrt{x}$ não seria uma função, pois a imagem desses valores negativos não existem em $\mathbb{R}$. Assim, para que h seja uma função, deve-se considerar apenas os valores reais não negativos:

$$\mathbf{D}(\boldsymbol{h}) = \mathbb{R}_{+}$$

ou

$$\mathbf{D}(\boldsymbol{h}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \mid \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}\}$$

7.Vamos conversar?

Qual seria o domínio da função k, definida por $k(x) = \sqrt{x - 13}$?

Para funções em que a variável independente encontra-se em um radical de índice par, deve-se sempre ter o cuidado de analisar as restrições do domínio, considerando que a expressão dentro do radical nunca poderá, em $\mathbb{R}$, ser um valor negativo.

Exercite um pouco mais: determine o domínio das funções abaixo.

$y = \sqrt{x}$

$y = \sqrt{-\frac{1}{5} + x}$

3. Considere a função g, definida por $g(x) = -\frac{10}{\sqrt{x}}$. Se, hipoteticamente, não houvesse qualquer restrição para o domínio, poderíamos atribuir alguns valores reais para x e determinar a sua imagem:

$$g\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{10}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = -\frac{10}{\frac{1}{2}} = -20$$

$$g(-8) = -\frac{10}{\sqrt{-8}} \notin \mathbb{R}$$

$$g(1) = -\frac{10}{\sqrt{1}} = -\frac{10}{1} = -10$$

$$g(-3) = -\frac{10}{\sqrt{-3}} \notin \mathbb{R}$$

Como $\sqrt{0} = 0$, ao atribuirmos zero como valor para x, teríamos o denominador igual a zero, que não existe.

Se 0 ou valores negativos pertencessem ao conjunto domínio, $g(x) = -\frac{10}{\sqrt{x}}$ não seria uma função, pois as imagens desses valores negativos não existem em $\mathbb{R}$ e $g(0)$ não existe. Assim, para que g seja uma função, deve-se considerar apenas os valores reais positivos:

$$\mathbf{D}(\boldsymbol{g}) = \mathbb{R}_+^*$$

ou

$$\mathbf{D}(\boldsymbol{g}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \,|\, \boldsymbol{x} > \mathbf{0}\}$$

8.Vamos conversar?

Qual seria o domínio da função f, definida por $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$?

Para funções em que a variável independente encontra-se em um radical de índice par e também no denominador, deve-se sempre ter o cuidado de analisar as restrições do domínio considerando que a expressão dentro do radical nunca poderá, em $\mathbb{R}$, ser um valor negativo e nem poderá ser igual a 0.

Exercite um pouco mais: determine o domínio das funções abaixo.

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{x}}$$

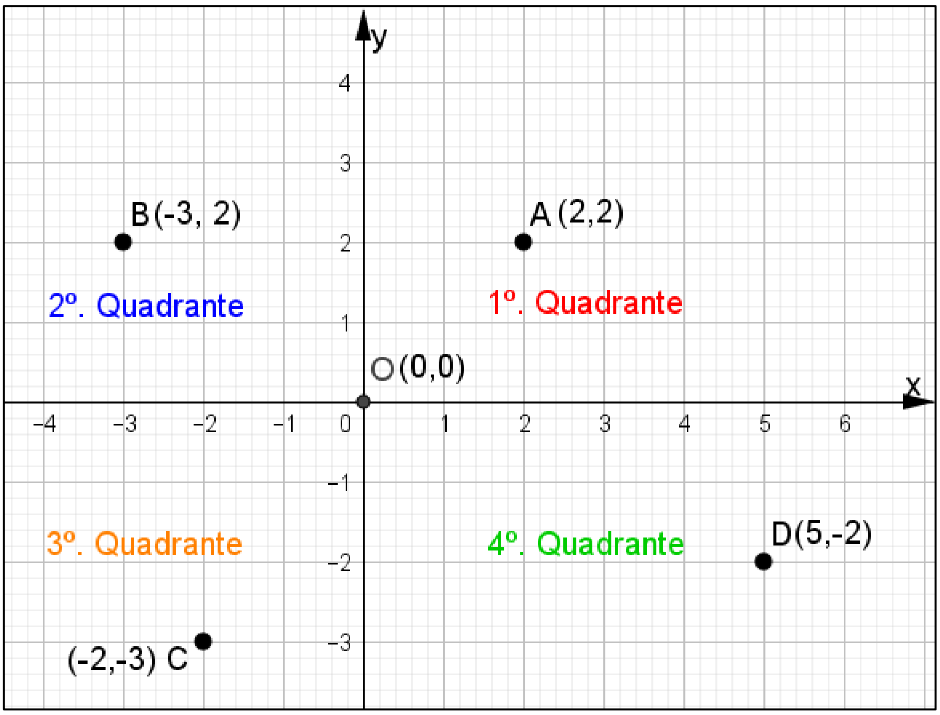
Para respondermos aos questionamentos das caixas verdes 5, 6, 7, e 8, sobre os conjuntos domínio, utilizamos os princípios do **Reconhecimento de Padrões** e da **Abstração**. O primeiro está relacionado com exemplos resolvidos que nos embasam para responder o que se pede. O segundo está relacionado com o fato de precisarmos nos ater às restrições possíveis, de acordo com o tipo de função. O princípio do **Algoritmo** pode ser considerado, pois está relacionado com a necessidade de adoção de uma estratégia para o cálculo, caso você não tenha conseguido definir as restrições apenas visualizando a lei da função.

2.4 Plano Cartesiano

Uma função também pode ser representada graficamente no plano cartesiano. Você se recorda o que ele é e suas principais características?

- O plano cartesiano é um sistema composto por **duas retas numeradas**, sendo uma vertical e uma horizontal. Essas retas se cruzam perpendicularmente no ponto chamado **origem**;
- Um **ponto** no plano cartesiano é localizado por meio de suas coordenadas cartesianas, determinada por um par ordenado de números reais na forma de (x, y);
- O plano é dividido em quatro **quadrantes**.

Vejamos:

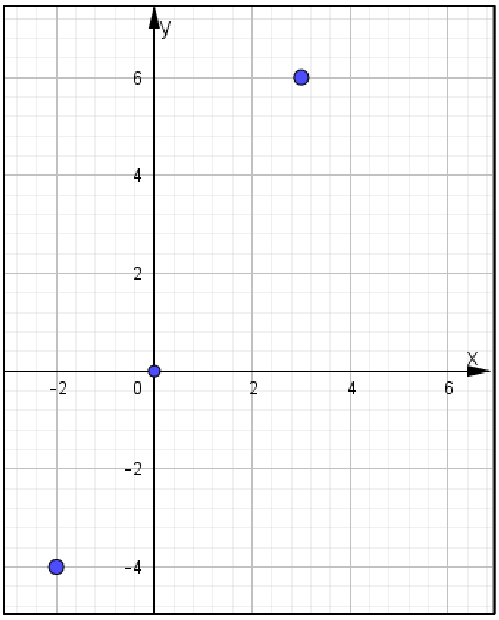


Nesta representação, podemos identificar as retas perpendiculares, a origem, alguns pontos e os quadrantes.

Para representarmos uma função por meio de seu gráfico no plano cartesiano, consideramos os valores do domínio no eixo *x* (eixo das abscissas) e as respectivas imagens no eixo *y* (eixo das ordenadas), para assim marcarmos os pontos (*x*, *y*).

Vejamos alguns exemplos:

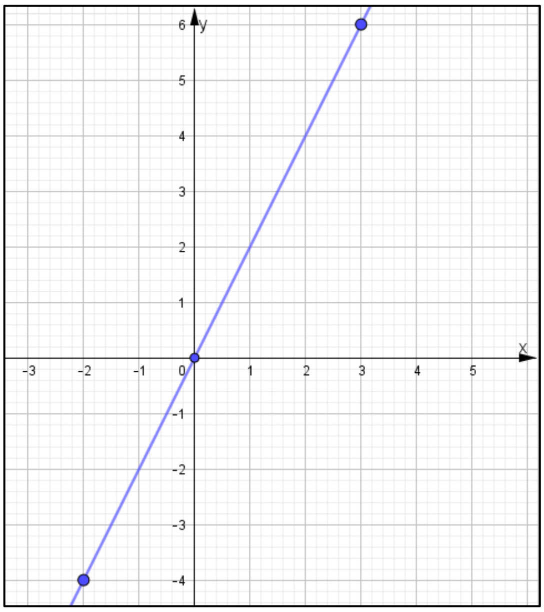
1. Seja g uma função de A em B, sendo A = {-2, 0, 3} e B = {-4, 0, 6, 9}, que associa cada elemento do conjunto A ao seu dobro.



9.Vamos conversar?

Quais seriam os conjuntos domínio, contradomínio e imagem da função g?

2. Considere a função f, $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x$.



10.Vamos conversar?

Quais seriam os conjuntos domínio, contradomínio e imagem da função *f*?

11.Vamos conversar?

O que há em comum e o que há de diferente entre as funções *g* e *f* acima?

Observação

Quando plotamos os gráficos de *g* e *f* no GeoGebra, obtemos a mesma representação, apesar de serem funções diferentes.
É importante que usemos o recurso tecnológico com **criticidade**!

Acesse o *applet* do GeoGebra disponível em https://www.geogebra.org/m/kphwkww6. Manipule as setas acrescentando, retirando e explorando os arranjos da relação *f*. Observe sua a representação diagramática e no plano cartesiano.

Plote*, no GeoGebra, o gráfico de cada uma das seguintes funções e observe se o gráfico plotado na tela levou em consideração o domínio da função, determinado nos exercícios da seção 2.3.

$g(x) = \frac{14}{2 - x}$

$y = -\frac{1}{x - \frac{1}{2}}$

$y = \sqrt{-\frac{1}{5} + x}$

$y = -\frac{14}{3x}$

$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$y = \sqrt{x}$

$y = \frac{x}{\sqrt{x}}$

$k(x) = \sqrt{x - 13}$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 - x}}$

Observação

*Plotar um gráfico é solicitar, a partir de um comando no campo de entrada, que o programa trace esse gráfico.

Para plotar os gráficos pedidos, observe as seguintes dicas:

12.Vamos conversar?

Observando o domínio dos gráficos plotados no GeoGebra, você identifica algum erro na representação do gráfico no aplicativo? Explicite o que observou.

Com este mesmo olhar, determine o domínio e plote o gráfico da função $y = \frac{x^2-9}{x-3}$. Há algum erro? Qual?

Observação

Mais uma vez, é importante que usemos o recurso tecnológico com **criticidade**!

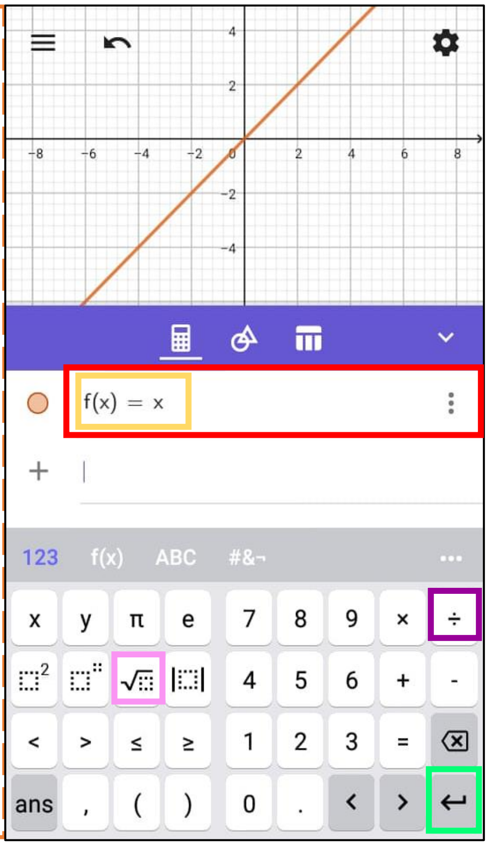
1º Para plotar os gráficos, utilize o campo de entrada, destacado em vermelho;

2º. Nesse campo, digite a lei da função desejada utilizando os recursos disponíveis na aba "123";

3º. Para digitar a função $f(x) = x$, por exemplo, basta digitar x. Assim, após clicar em Enter – destacado em verde – o GeoGebra fará o registro conforme destacado em amarelo;

4º. Para plotar o gráfico de funções que possuem raiz quadrada ou frações, como as pedidas na atividade anterior, utilize, respectivamente, os ícones $\sqrt{\square}$, destacado em lilás, e ÷, destacado em roxo;

5º. Digite sempre na ordem em que as operações aparecem na função. Por exemplo, para $y = \sqrt{-\frac{1}{5} + x}$, clique no ícone da raiz, em seguida no sinal negativo, depois no 1. Após isso, clique no ícone de fração e no número 5. Em seguida, clique em frente à fração formada, bem próximo da fração, de modo a não clicar fora do radical. Enfim, digite o x.



- Acesse o *applet* do GeoGebra disponível em https://www.geogebra.org/m/gjd48pbn, selecione a caixa "Domínio", clique no ícone e observe em azul a representação desse conjunto. A seguir, reinicie o *applet* clicando no ícone, selecione a caixa "Conjunto Imagem" e observe em verde a representação desse conjunto. Por último, reinicie novamente o *applet* e selecione as duas caixas, "Domínio" e "Conjunto Imagem", simultaneamente. Esta é uma forma dinâmica de visualizar esses dois conjuntos em uma função cujos conjuntos domínio e imagem são o conjunto dos números reais.
- Repita os mesmos passos descritos no item anterior com o *applet* disponível em https://www.geogebra.org/m/fAg8DWuk. Observe que, neste caso existem valores

Para respondermos aos questionamentos das caixas verdes 9 e 10, sobre os conjuntos domínio, contradomínio e imagem no plano cartesiano, utilizamos os princípios do **Reconhecimento de Padrões**, da **Abstração** e do **Algoritmo** pelas mesmas razões destacadas na resolução das caixas verdes 5, 6, 7 e 8. Porém, observe que há ainda as caixas verdes 11 e 12, que trazem questionamentos mais profundos e exigem um olhar mais crítico. Considera-se que os quatro princípios são utilizados neste caso.

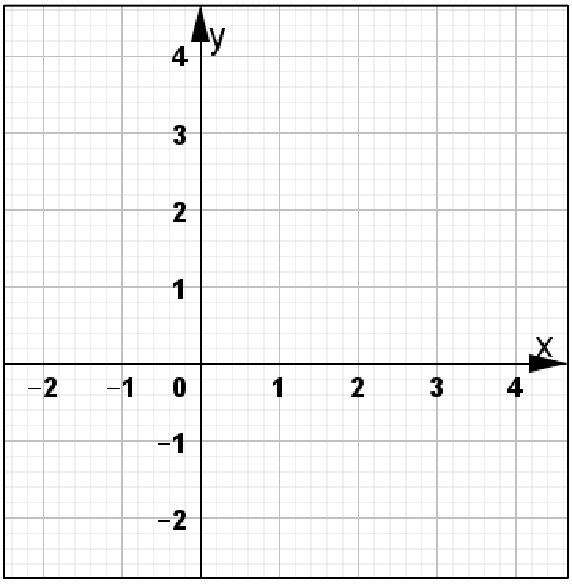
2.5 Representação gráfica no plano cartesiano

Na construção gráfica de uma função f, marcamos no plano cartesiano os pontos (x, y) em que $y = f(x)$ e $x \in D(f)$.

Vamos juntos construir os gráficos dos itens i e ii:

i. Sendo g uma função de A em B, definida por $g(x) = x - 1$, com A = {-1, 0, 2, 3} e B = {-2, -1, 0, 1, 2}, faça o esboço de seu gráfico.

x	$g(x) = x - 1$	(x, y)



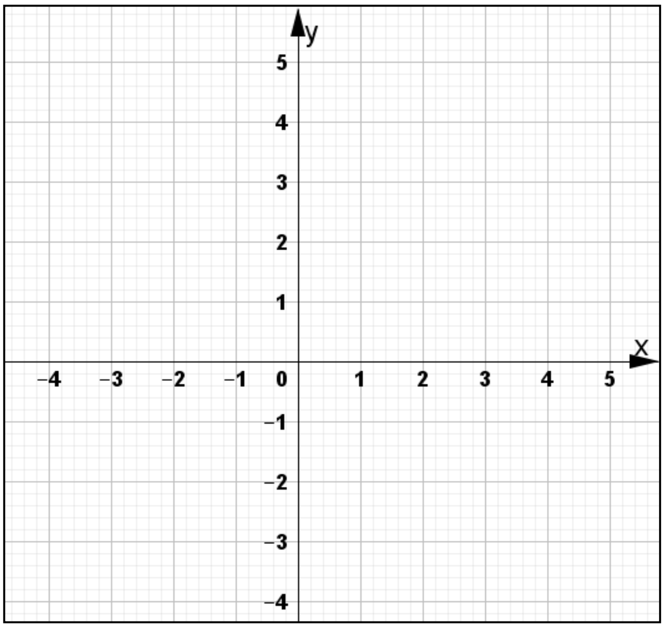
Para construir gráficos de funções em que o domínio é um conjunto infinito, podemos nos nortear da seguinte forma:

1. Construir uma tabela com valores para x, pertencentes ao domínio, escolhidos convenientemente, e com os seus respectivos correspondentes em para $y = f(x)$;
2. Associar cada par ordenado (x, y) da tabela a um ponto no plano cartesiano;
3. Analisar a necessidade de marcar outros pontos para que seja possível esboçar melhor o gráfico da função.

ii. Sendo f uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$, faça o esboço de seu gráfico.

x	$f(x) = x$	(x, y)

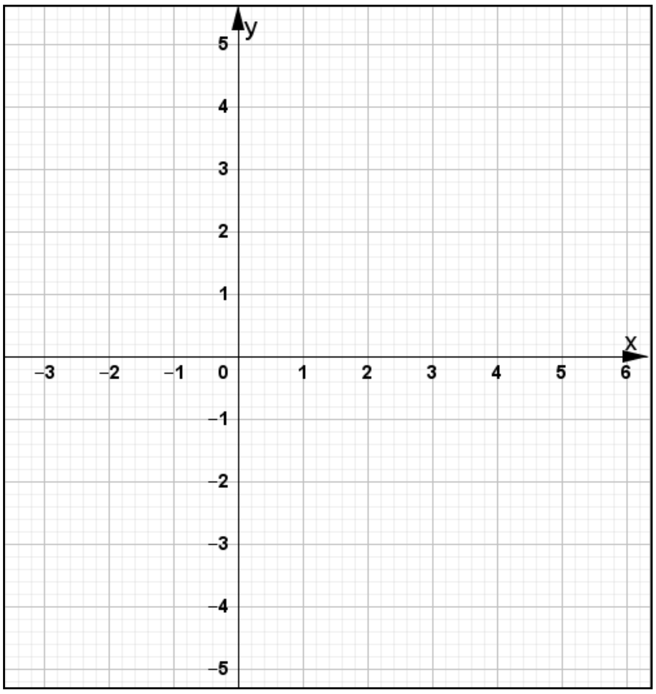
Caso sinta necessidade de atribuir mais valores para x, adicione mais linhas nesta tabela.



Agora é sua vez de esboçar:

iii. Sendo h uma função de ℝ em ℝ, definida por $h(x) = -2x + 1$, faça o esboço de seu gráfico.

x	$h(x) = -2x + 1$	(x, y)



Observação

Observe que, de modo semelhante à função f, D(h) = ℝ, o que acarreta infinitos valores para x. Ao ligarmos novamente os pontos, para encontrar o gráfico, obtemos novamente uma reta.

Para fazermos juntos o esboço do gráfico, é nítido o uso da **Decomposição** e **Algoritmo** no uso da tabela para encontrar cada ponto pertencente a reta que representa a função, até que seja possível vislumbrar seu esboço. No item iii, além dos dois princípios anteriores, usamos o **Reconhecimento de Padrões** uma vez que foi com base nos esboços feitos em i e ii que você se respalda para fazer sozinho o esboço conforme se pede.

Quadro 3 - Definição de Função Polinomial do 1º Grau

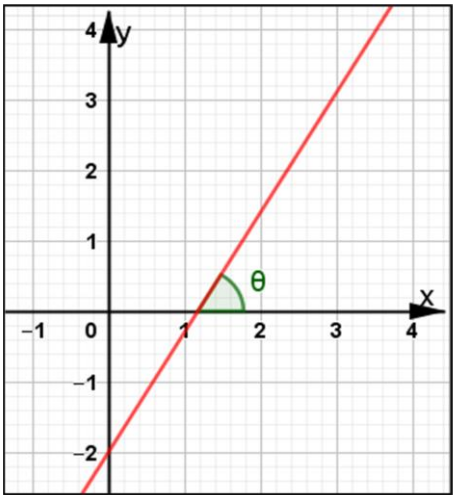
Uma função de ℝ em ℝ expressa genericamente por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$ e $b \in$ ℝ, é chamada de **Função Polinomial do 1º Grau** e sua representação gráfica no plano cartesiano é sempre uma **reta**.

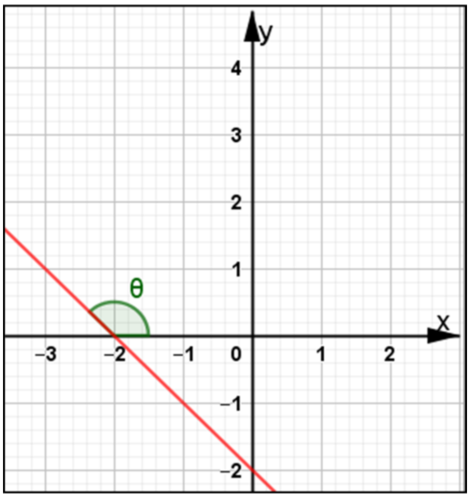
Mas, afinal, o que são a e b em relação à representação gráfica da Função Polinomial do 1º Grau?

- Conhecido como coeficiente angular ou declividade, *a* é dado pela tangente do ângulo que a reta forma com o eixo *x* no sentido anti-horário, considerando que os eixos estejam na mesma escala.
- Conhecido como coeficiente linear, *b* é a ordenada do ponto de interseção da reta com o eixo *y*, sendo ele (0, *b*).

Observação

- Se o ângulo está entre 0º e 90º, a tangente do ângulo é positiva, logo *a* é positivo;
- Se o ângulo está entre 90º e 180º, a tangente do ângulo é negativa, logo *a* é negativo.





Podemos determinar a lei de formação de uma Função Polinomial do 1º Grau conhecendo dois pontos de seu gráfico. Vejamos os exemplos:

1. Determine a lei de formação da função cuja representação gráfica é a reta que passa pelos pontos (3, 2) e (-1, 6).

Primeiro: Sabemos que: $f(x) = y$, logo $y = ax + b$.

Segundo: Substituindo os pontos que sabemos que pertencem à reta, temos que:

Ponto (3,2):

$2 = a.3 + b$

$2 = 3a + b$

Ponto (-1,6):

$6 = a.(-1) + b$

$6 = -a + b$

$$- \begin{cases} 3a + b = 2 \\ -a + b = 6 \end{cases}$$

$$4a = -4$$

$$a = \frac{-4}{4}$$

$$\boldsymbol{a = -1}$$

$3a + b = 2$

$3(-1) + b = 2$

$-3 + b = 2$

$b = 2 + 3$

$\boldsymbol{b = 5}$

Substituindo os valores de *a* e *b* na função genérica:

$$y = -1.x + 5$$

$$\boldsymbol{y = -x + 5}$$

2. Determine a lei de formação da função cuja representação gráfica é a reta que passa pelos pontos (0, 1) e (1, 2).

Primeiro: Sabemos que: $f(x) = y$, logo $y = ax + b$.

Segundo: Substituindo os pontos que sabemos que pertencem à reta, temos que:

Ponto (0,1):

$1 = a.0 + b$

$1 = 0 + b$

$\mathbf{1 = b}$

Ponto (1,2):

$2 = a.1 + b$

$2 = a + b$

$2 = a + 1$

$2 - 1 = a$

$\mathbf{1 = a}$

Substituindo os valores de a e b na função genérica:

$y = 1.x + 1$

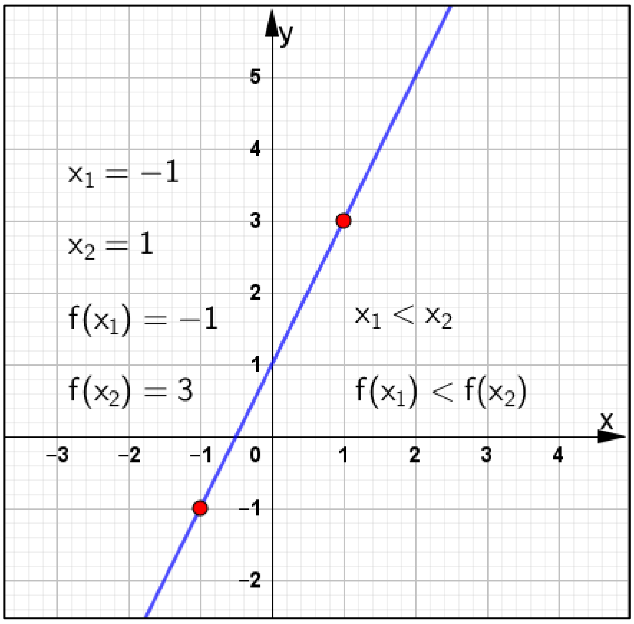
$\boldsymbol{y = x + 1}$

2.6 Crescimento e decrescimento da Função Polinomial do 1º Grau

Funções Polinomiais do 1º Grau podem ser classificadas em **crescente** ou **decrescente**.

Vejamos qual a característica de cada uma delas:

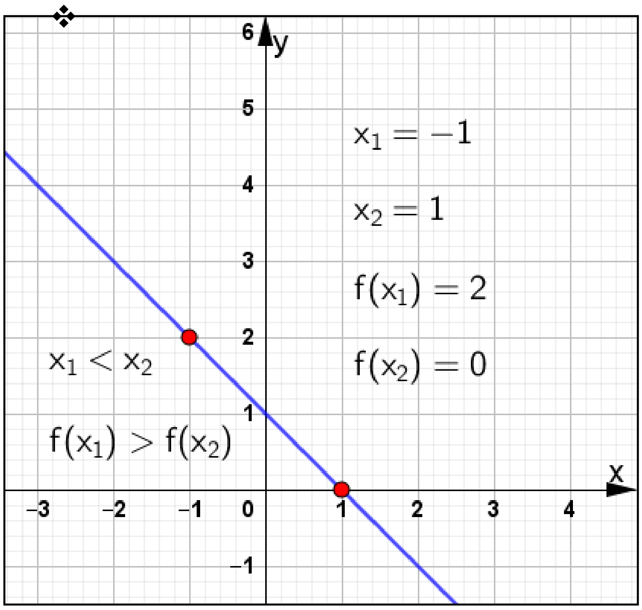
❖ A Função Polinomial do 1º Grau é dita **crescente** quando, tomados dois valores diferentes para x, x_1 e x_2, se $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$. Vejamos o exemplo abaixo, em que $f(x) = 2x + 1$:



13.Vamos conversar?

Analise a função f do item ii na página 16, tomando $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$, podemos dizer que $f(x_1)$ é menor do que $f(x_2)$? Podemos dizer que f é crescente?

- A Função Polinomial do 1º Grau é dita **decrescente** quando, tomados dois valores diferentes para x, x_1 e x_2, se $x_1 < x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$. Vejamos o exemplo abaixo $f(x) = -x + 1$:



14.Vamos conversar?

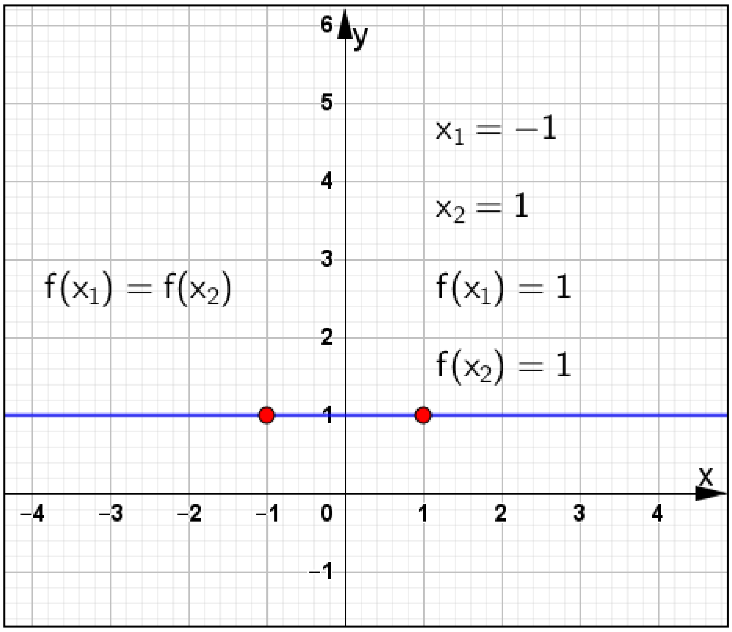
Analise a função h do item iii na página 17, tomando $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$, podemos dizer que $h(x_1)$ é menor do que $h(x_2)$? Podemos dizer que h é decrescente?

É importante definir também a **Função Constante:**

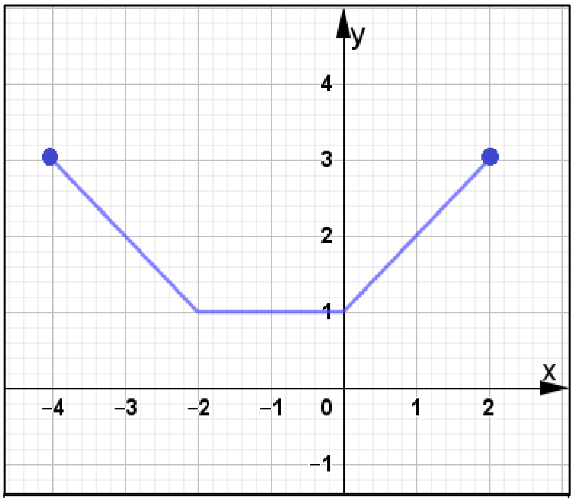
Quadro 4 - Definição de Função Constante

Uma função de ℝ em ℝ expressa genericamente por $f(x) = b$, $b \in \mathbb{R}$, é chamada de **Função Constante** e sua representação gráfica no plano cartesiano é sempre uma **reta paralela ao eixo** ***x***.

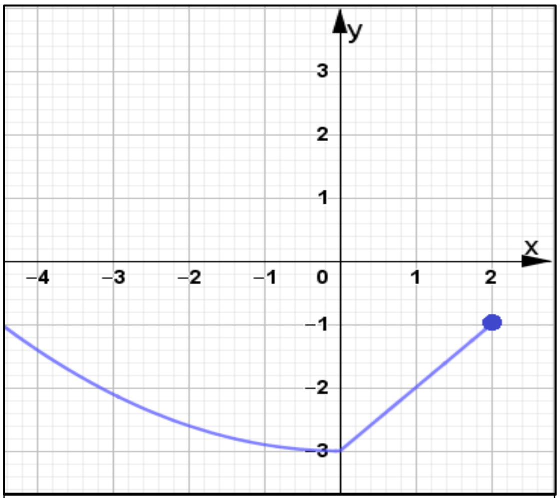
Nesta função, tomados quaisquer valores diferentes para x, $f(x) = k$, sendo k um número real. Vejamos o exemplo abaixo em que $f(x) = 1$:



Uma mesma função pode conter intervalos crescentes, decrescentes ou constantes, conforme pode ser observado nos exemplos abaixo:



Função decrescente em [-4, -2], constante em [-2, 0] e crescente em [0, 2].



Função decrescente em]-∞, 0] e crescente em [0, 2].

Há uma forma de determinar se Função Polinomial do 1º Grau será decrescente ou crescente. Vejamos:

Utilizando o aplicativo GeoGebra, digite a seguinte função no campo de entrada: $\boldsymbol{y = ax + b}$.

- Surgiram dois controles deslizantes: a e b.
- É possível alterar os valores de a e b conforme movimentamos os controles deslizantes.
- Movimente tais controles e observe o que acontece com a representação gráfica.

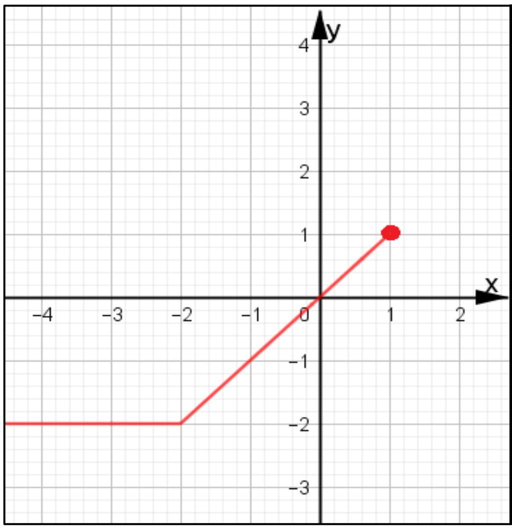
Observe que:

> Quando $a > 0$, temos uma função crescente;
>
> Quando $a < 0$, temos uma função decrescente.

> Nos exemplos acima citados, podemos destacar que:
>
> $f(x) = 2x + 1 \rightarrow a = 2$
> $f(x) = -x + 1 \rightarrow a = -1$
>
> **Observação**

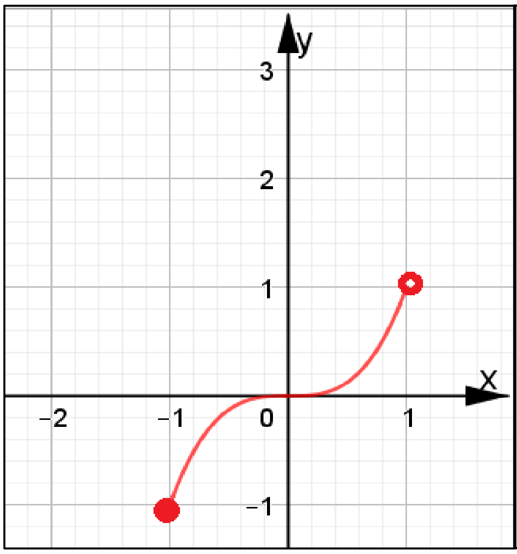
2.7 Análise Gráfica

Os gráficos de funções podem apresentar diferentes formatos. Além dos diversos gráficos já apresentados nas seções anteriores, vamos analisar alguns outros, destacando aspectos relevantes e identificando seus conjuntos domínio e imagem.



Nesta função, que chamaremos de *f*, temos que:

- D(*f*) =]-∞, 1]
- Im(*f*) = [-2,1]
- É composta por um intervalo constante e outro crescente.
- A representação de uma bolinha totalmente preenchida (fechada) no ponto (1, 1) inclui o valor de $x = 1$ no conjunto domínio.

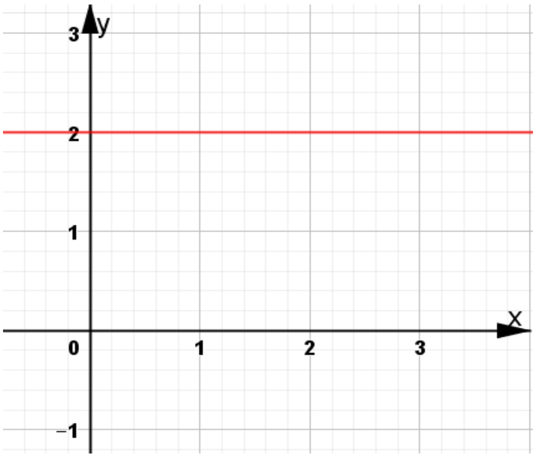


Nesta função, que chamaremos de *g*, temos que:

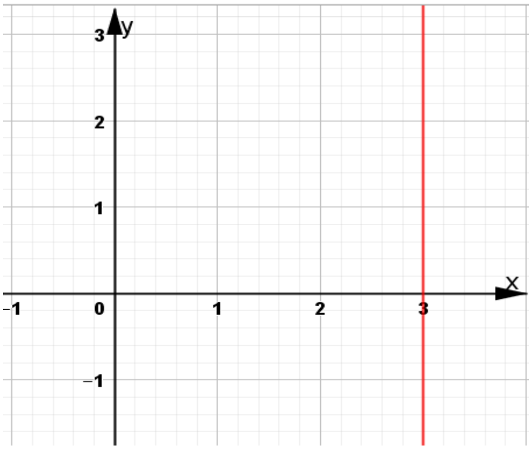
- D(*g*) = [-1, 1[
- Im(*g*) = [-1, 1[
- A representação de uma bolinha totalmente preenchida (fechada) no ponto (-1, -1) inclui o valor de $x = -1$ no conjunto domínio. Já a representação de uma bolinha não preenchida (aberta) no ponto (1, 1) exclui o valor de $x = 1$ do conjunto domínio.

Agora que já discutimos sobre o plano cartesiano e também sobre os conjuntos domínio, contradomínio e imagem, vamos analisar os gráficos abaixo e verificar, em cada caso, se estes podem representar uma função *f* tal que $y = f(x)$. Use os retângulos ao lado de cada gráfico para responder se ele representa ou não uma função. Quando não for uma função, justifique, e quando for uma função, determine os conjuntos domínio e imagem.

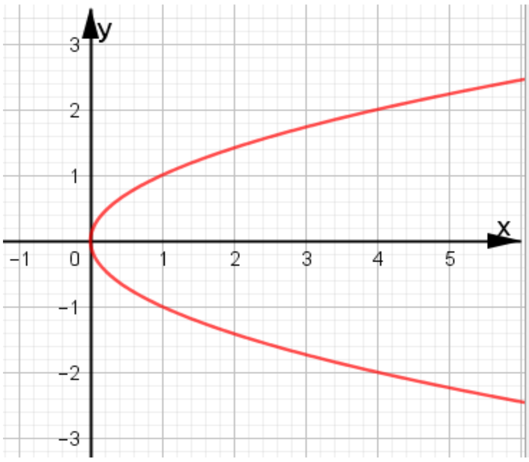
i.



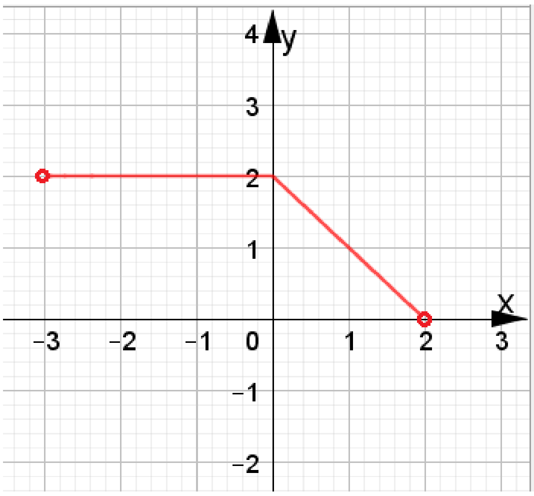
ii.



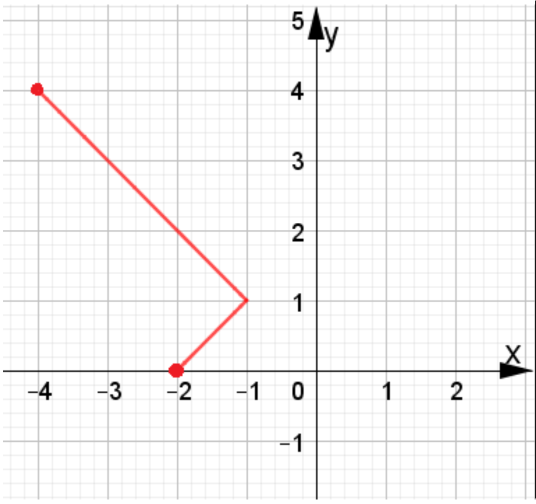
iii.



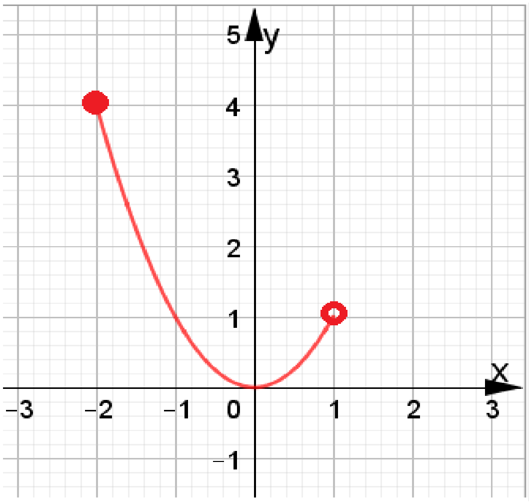
iv.



v



vi.



3. Atividades

Agora que revisamos certos conceitos iniciais e fundamentais acerca de Função, vamos resolver alguns problemas, aplicando os princípios do Pensamento Computacional. A troca com os colegas e o professor neste momento é muito enriquecedora, mas não se esqueça de que existem diversas formas de se resolver um mesmo problema! Então, valorize sua forma de pensar!

Utilize régua para traçar o plano cartesiano e, quando necessário, utilize-a também para construir os esboços de gráfico pedidos.

1. Esboce o gráfico da primeira situação-problema apresentada na apostila: “Se um vidro de álcool em gel de 500 ml custa R$15,00, o valor total a ser pago por uma pessoa que compra esse produto está relacionada com quantos vidros serão comprados”; cuja lei de formação da função foi definida como $f(x) = 15x$.

2. Plote no GeoGebra o gráfico da função da atividade anterior. As representações gráficas são iguais? Você considera que o gráfico do aplicativo representa a situação-problema inicial? Se não, o que difere as representações?

3. Um reservatório, com capacidade para 1000 litros, encontra-se completamente cheio de água. Uma pequena saída para o líquido é aberta, de modo que a cada minuto, 1 litro é despejado do reservatório.

a) Escreva a lei de formação que expressa essa situação.

b) Escreva um algoritmo para encontrar o quanto de água ainda restará depois de decorridos 15 minutos.

c) Faça o esboço do gráfico que representa esta função.

d) No GeoGebra, insira a lei de formação encontrada no campo de entrada e reflita sobre o gráfico apresentado: os conjuntos domínio e imagem representam a situação inicial?

4. Nos itens abaixo, determine o que se pede:

a) Elabore uma situação-problema que possa ser representada por meio de uma função cujo domínio seja o conjunto dos números naturais.

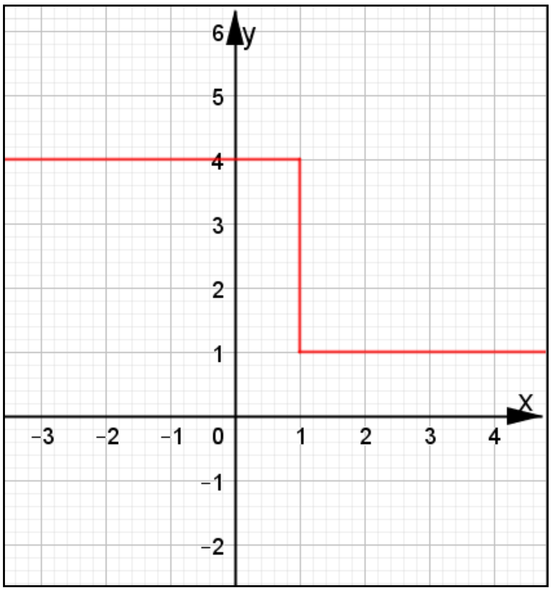
b) Represente a situação descrita em uma tabela.

c) Escreva a lei de formação da função.

d) Escolha um valor do domínio dessa função. Escreva um algoritmo que possibilite encontrar, a partir da lei de função, a imagem desse valor do domínio.

5. No gráfico de uma função Polinomial do 1º Grau, a reta intersecta o eixo y no ponto (0, 1) e sabemos que o ponto (-3, 4) também pertence a essa reta. Com essas informações, determine se a reta é crescente ou decrescente.

6. Observe o gráfico abaixo:



a) O gráfico representa uma função de ℝ em ℝ?
b) Justifique a resposta dada no item "a" escrevendo um algoritmo que permita compreender como você chegou a essa conclusão.

2.3 Atividade Final

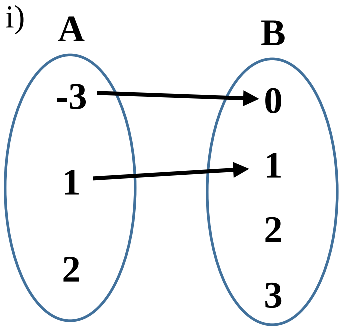
MESTRADO PROFISSIONAL ENSINO E SUAS TECNOLOGIAS — INSTITUTO FEDERAL Fluminense *Campus* Campos Centro — MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO — PÁTRIA AMADA BRASIL GOVERNO FEDERAL

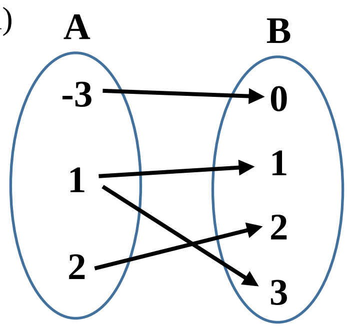
Atividade Final

Apelido: ____ Data: ___ /___/ _______

Registre todos os cálculos realizados

1. Observe a seguir as relações entre os conjuntos A e B.

i) 

ii) 

a) Para cada um dos itens acima, responda se a relação representa uma função de A em B.

b) Explique como analisar e responder o item “a” de maneira que seu colega consiga compreender o seu raciocínio.

2. Um jovem decidiu começar a correr na pista retilínea de atletismo que construíram na sua cidade. Como não estava se exercitando até dar início às suas corridas, começou com um ritmo de 2 metros a cada segundo.

a) Escreva a lei de formação da função que representa a situação descrita acima, considerando o tempo como variável independente e a distância percorrida como variável dependente.

b) Quais são os conjuntos domínio e imagem?

c) Mantendo este ritmo, em quanto tempo o jovem terá percorrido 212 metros?

3. Escreva uma Função Polinomial do 1º Grau ($y = ax + b$, $a \neq 0$) em que todas as imagens dos valores positivos de x estejam no 4º quadrante. Plote o gráfico da função no GeoGebra e verifique se a condição estabelecida foi atendida. Logo após, escreva a lei de formação genérica que representa todas as Funções Polinomiais do 1º. Grau com a referida característica.

4. Para complementar sua renda, dona Maria vende alguns salgados. Cada unidade é vendida por R$ 5,00 e o cliente pode optar pela quantidade a ser comprada dentre as variedades e sabores disponíveis no momento do pedido. Como seu empreendimento funciona apenas com entregas no local indicado pelo cliente (*delivery*), dona Maria cobra uma taxa fixa de R$ 3,00 para cada entrega realizada.

a) Se “número de salgados comprados” e “valor pago pelo cliente” são as variáveis da situação descrita, qual é a variável dependente e qual é a variável independente?

b) Considerando $f(x)$ o valor pago pelo cliente e x o número de salgados vendidos, escreva uma função que represente essa situação.

c) Qual é o domínio dessa função?

d) Escreva um algoritmo para encontrar $f(11)$.

5. Construa um polígono no GeoGebra utilizando gráficos de funções polinomiais do 1º. Grau para construir seus lados*. Para tanto, estabeleça, anteriormente, as etapas da

construção no papel, de modo que seu colega consiga executar o mesmo projeto somente com suas instruções.

Observação

*Para delimitar o domínio da função plotada no GeoGebra siga os seguintes passos:

1º Após digitar a lei da função, insira uma vírgula e o intervalo desejado para *x*. Destacado em vermelho, na Figura 1, pode-se observar que o domínio foi delimitado para valores maiores do que 1, mas o gráfico só representará o domínio pedido após clicar em Enter, como mostra a Figura 2. Observe, destacado em verde, nessa mesma figura, que a estrutura do registro da função *f* se modifica quando clicamos em Enter.

Figura 1

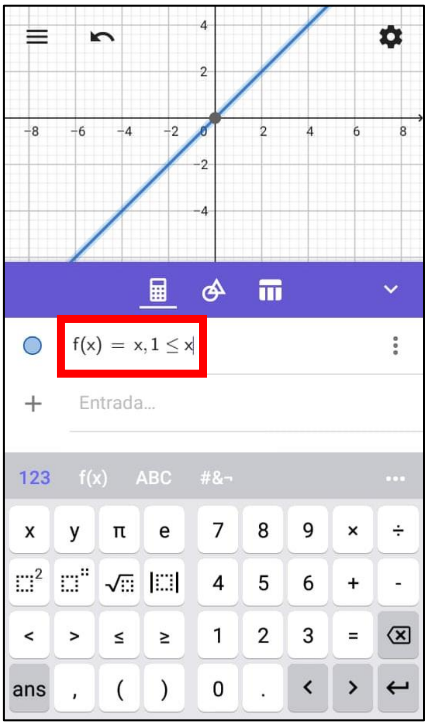
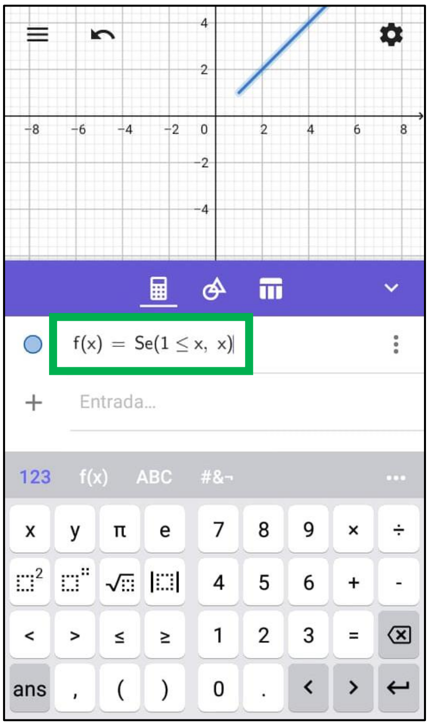


Figura 2



2º Na Figura 3, pode-se perceber, destacado em vermelho, que a mesma função $f(x) = x$ agora tem o domínio delimitado para valores de *x* entre 1 e 4. Nesta mesma figura, observe que o domínio pedido ainda não foi representado no gráfico, pois o Enter ainda não foi pressionado. Já a Figura 4 mostra a resposta do GeoGebra quando, após digitada a função e o intervalo desejado, clicamos em Enter.

Figura 3

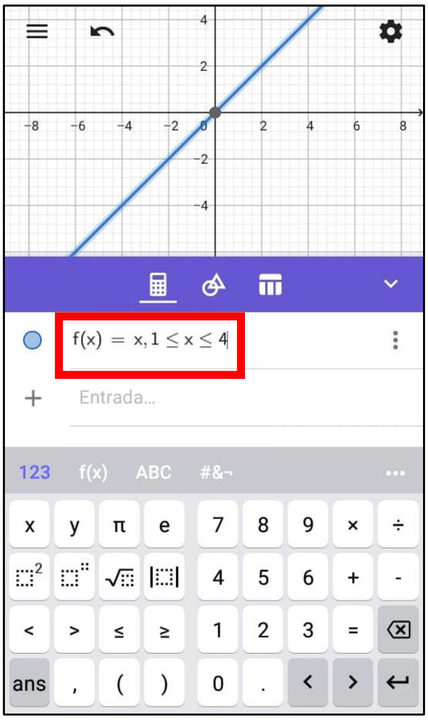
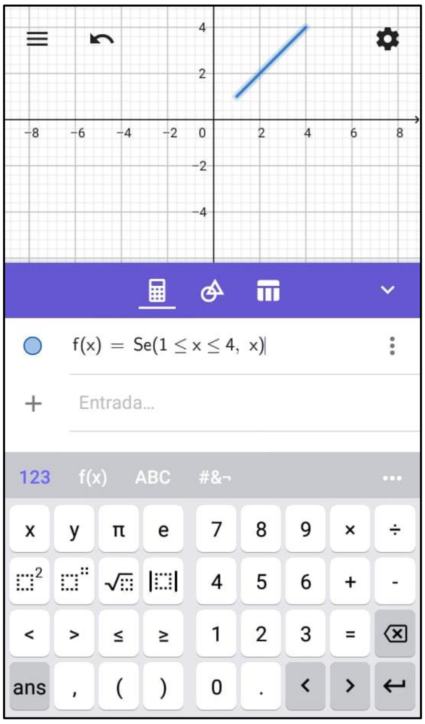
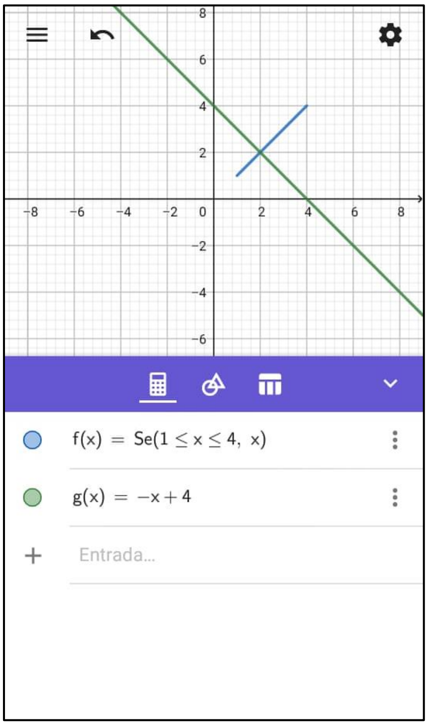


Figura 4



3º Você pode adicionar no mesmo plano quantos gráficos quiser, delimitando ou não seus domínios. Observe na Figura 5 que no mesmo plano temos as funções *f* e *g*.

Figura 5



3. Orientações Práticas

Nesta seção apresentam-se orientações práticas, delineadas de acordo com os desafios de implementação do Pensamento Computacional de forma transversal ao currículo de Matemática do Ensino Médio, como proposto na BNCC, assim como possibilidades para outras propostas.

Na fase de planejamento do produto, anteriormente à sua aplicação com o público-alvo, realizou-se uma avaliação de todo o material com cinco licenciandos em Matemática que já tinham experiência na elaboração de materiais didáticos. Considera-se essa avaliação importante, pois permite identificar equívocos que devem ser reparados, e também melhorias que podem ser feitas antes da experimentação com o público-alvo de fato. Nesse sentido, sugere-se que, em casos de adaptações, o professor também submeta a proposta a uma validação com os pares, de forma a trazer contribuições à qualidade do produto.

Ainda durante o planejamento, vivenciou-se o primeiro desafio (ocorrido durante a elaboração da apostila "Introdução de Função"): destacar os princípios do Pensamento Computacional ao ensinar os conceitos básicos de função, visto que se buscava que os alunos se apropriassem tanto do conteúdo matemático quanto dos princípios em foco, algo que, em especial, não havia sido identificado nos trabalhos da literatura sobre essa temática. Nesse sentido, considera-se interessante que professores explorem o ensino de outros temas, ressaltando-se, como feito na apostila, o uso dos princípios como técnicas de estudo da resolução de problemas.

Em relação ao uso dos princípios do Pensamento Computacional, o professor deve, inicialmente, apropriar-se deles e analisar o tema que deseja desenvolver com os alunos, buscando por tópicos que possam ser abordados com o olhar dos princípios. Vale observar que não é necessário, e nem sempre possível, abordar os quatro princípios em todos os tópicos, como pode ser constatado na própria apostila "Introdução de Função". Considera-se que o mesmo se aplica à utilização do Pensamento Computacional na resolução de problemas, uma vez que pode ser intenção do docente explorar, especificamente, por exemplo, o princípio da Abstração. Dessa forma, ele irá elaborar problemas que atendam a esse objetivo. Caso o objetivo seja observar, na mesma questão, as habilidades dos alunos em trabalhar com os quatro princípios, o professor deverá elaborar um problema que atenda a esse objetivo. Também é relevante dizer que, na percepção da pesquisadora, não se deve restringir o tipo de problema que será proposto ao aluno aos contextualizados com a realidade do público-alvo. Sugere-se que o docente traga situações iniciais que, de fato, sejam familiares ao público-alvo, mas que, em dado momento, explore problemas pertinentes à própria Matemática, promovendo, ainda assim, o desafio.

Como na presente proposta a implementação do Pensamento Computacional ocorreu por meio das atividades plugadas (com o uso do GeoGebra) e desplugadas (com atividades que pediam a escrita de algoritmos), considera-se que outra possibilidade de inserção do Pensamento Computacional no currículo seria explorar, mais especificamente, uma dessas atividades. Para as atividades plugadas, por exemplo, é possível utilizar outros aplicativos tanto para o estudo de função - como o Desmos[2], quanto para o estudo de outros temas, como o aplicativo GeoGebra para Geometria. Já para as atividades desplugadas, a proposta do uso de jogos de tabuleiro ou de cartas para o desenvolvimento de algoritmos é uma outra alternativa, como desenvolvido no trabalho de Brackmann (2017).

Caso o professor deseje propor atividades plugadas e desplugadas da forma como foi abordado nesta proposta, sugere-se que, primeiramente, estabeleça que habilidades, referentes ao tema em foco, espera observar. O segundo passo é refletir sobre qual (is) dos quatros princípio do Pensamento Computacional pode (m) contribuir para que se evidencie tal habilidade. Apresentam-se dois exemplos: i) se o objetivo for identificar se o aluno consegue associar diferentes conceitos na resolução de um problema de complexidade maior do que aqueles propostos nos momentos de discussão sobre o tema, elabore um enunciado que exija a aplicação dos quatro princípios; ii) se o objetivo for verificar se o aluno consegue responder a um novo problema, semelhante aos resolvidos nos momentos de discussão, mas buscando entender que estratégia ele adota no desenvolvimento, elabore o enunciado de forma a atender o princípio do Algoritmo, assim o aluno deverá explicitar uma sequência de passos ou etapas que evidenciarão sua forma de responder.

---

[2] Desmos é uma ferramenta matemática que possui algumas funções, dentre elas, a calculadora gráfica, que pode ser encontrada em https://www.desmos.com/calculator?lang=pt-BR.

Outra recomendação é que se planeje e se aplique um questionário inicial ou uma entrevista semiestruturada, a partir dos quais se busque compreender que recursos tecnológicos os alunos possuem, seja para sua participação na experimentação de forma remota ou seja para saber que atividades podem ser propostas, entendendo quais recursos tecnológicos podem ser usados pelo grupo. Esclarece-se que, no caso da pesquisadora, a aplicação ocorreu remotamente por conta da pandemia de COVID-19, a qual ocasionou a suspensão das aulas presenciais no Brasil a partir do primeiro trimestre do ano de 2020.

A fase de experimentação com os alunos da 1ª série do Ensino Médio ocorreu no formato de um curso online extracurricular, nomeado Estudo Introdutório de Função, uma vez que a pesquisadora não era professora dos alunos. Foram destinadas 24 vagas para os alunos e, como houve 57 inscritos, realizou-se um sorteio. A plataforma usada para os encontros síncronos foi o Google Meet e, para disponibilização de materiais e postagem das respostas das atividades foi usado o Google Classroom. Destaca-se, ainda, que, inicialmente, foram planejados sete encontros, com duração de 1h30min cada, mas houve a necessidade de se estender para oito encontros, para que a apostila fosse trabalhada calmamente.

O primeiro desafio vivenciado nessa fase foi a forma como a experimentação ocorreu. Como o material vinha sendo pensado para uma aplicação presencial, foram necessárias algumas adaptações, para atender ao ensino remoto. Salienta-se que a validação pelos licenciandos em muito auxiliou nesse sentido. As adaptações foram feitas de modo que fosse possível a utilização, por professores, quando as aulas presenciais retornassem. Assim, considera-se que apesar do material ter sido validado de forma remota, possa também ser usado em aulas presenciais.

Durante a experimentação, observou-se que os alunos tiveram um pouco mais de dificuldade em compreender o princípio do Algoritmo. Nesse contexto, sugere-se que o professor dê ênfase à característica desse princípio na resolução de mais de um problema, refletindo, em cada momento oportuno, juntamente com os alunos, sobre como escrever um algoritmo.

Outra observação relevante foi a dificuldade que alguns alunos tiveram em responder questões que necessitavam do uso do GeoGebra. Caso o professor venha a experimentar este material de forma remota, sugere-se que utilize, assim como feito pela pesquisadora, o espelhamento de tela para mostrar o aplicativo para os alunos e também para explicar como manipulá-lo. Os resultados obtidos sinalizaram, porém, que o espelhamento foi insuficiente para instigar o uso do aplicativo em atividades propostas na apostila. Nesse contexto, sugere-se, ainda, que se realizem todas as atividades que pressuponham o uso de GeoGebra de forma síncrona e que, além de possibilitar a abertura da câmera dos alunos para que possam tirar dúvidas, solicite a captura de tela dos seus celulares. Assim será possível acompanhar o progresso de cada um e também se inteirar melhor das dificuldades. Sugere-se o mesmo, caso o professor adapte este material e use, em vez do GeoGebra, outro aplicativo. Em caso de experimentação de forma presencial, é sugerido atenção nas atividades que necessitam do uso do GeoGebra, no sentido de orientar atentamente os alunos e também possibilitar um espaço troca de entre professor-aluno e aluno-aluno, o que foi dificultado no Curso online extracurricular.

Destaca-se, também, que a aplicação da proposta de forma virtual promoveu outro desafio no que diz respeito à interação dos alunos em alguns encontros. Durante vários momentos, a pesquisadora percebeu a necessidade de dialogar com os alunos para entender as razões que levavam à pouca participação nas discussões. Em geral, o motivo foi o cansaço, já que o Curso ocorreu em dias consecutivos, tendo os encontros a duração de 1h30min cada. Como a pesquisadora não era professora do público-alvo, houve a necessidade da oferta extracurricular do Curso e, nesse contexto, as aulas e atividades das disciplinas curriculares somadas aos encontros do Curso tornaram o processo cansativo. Sugere-se que, caso um professor ou pesquisador que não seja docente da turma queira usar na íntegra ou adaptar esta proposta, não faça uso de encontros consecutivos ou que reduza o tempo de cada encontro.

O incentivo por propostas semelhantes parte, principalmente, da constatação de que houve, de fato, uma aprendizagem significativa de conceitos abordados e também melhoria na capacidade de resolução de problemas por parte dos alunos. Considera-se, também, que seja importante uma leitura da nova Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), para melhor compreensão das capacidades a serem desenvolvidas, conforme esse documento propõe.

Referências

AUSUBEL, D. P. *Aquisição e retenção de conhecimentos*: uma perspectiva cognitiva. 1. ed. Lisboa: Plátano Edições Técnicas. 2003.

BRACKMANN, C. P. *Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na educação básica*. 2017. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/handle/10183/172208. Acesso em: 12 abr. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*: educação é a base. Brasília: Ministério da Educação, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 11 abr. 2019.

CARVALHO, A. S. *MECATAS*: uma modelo para o ensino-aprendizagem de engenharia de controle e automação baseado na teoria da aprendizagem significativa. 2011. 146 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/60936/000863498.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 30 jun. 2019.

MOREIRA, M. A. O que é afinal Aprendizagem Significativa?. *Qurriculum*, La Laguna, Espanha, p. 1-27, 2012. Disponível em: http://moreira.if.ufrgs.br/oqueeafinal.pdf. Acesso em: 19 maio 2019.

VALENTE, J. A. Integração do pensamento computacional no currículo da educação básica: diferentes estratégias usadas e questões de formação de professores e avaliação do aluno. *Revista e-Curriculum*, São Paulo, v.14, n. 3, p. 864-897, jul./set. 2016. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/curriculum/article/view/29051/20655. Acesso em: 11 abr. 2019.

WING, J. M. Computational Thinking. *Communications of the ACM*, v. 49, n. 3, p.33-35, mar. 2006. Disponível em: https://www.cs.cmu.edu/~./15110-s13/Wing06-ct.pdf. Acesso em: 11 abr. 2019.

WING, J. M. Computational thinking's influence on research and education for all. *Italian Journal of Educacional Technplogy*, v. 25, n. 2, p. 7-14, 2017. Disponível em: http://www.cs.cmu.edu/~wing/publications/Wing17.pdf. Acesso em: 11 abr. 2019.